УДК 519.615.4 DOI: 10.18698/2541-8009-2023-5-891

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Н.К. Абрамов abramov.chess@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлены результаты разработки и реализации метода нахождения всех корней многочлена с действительными коэффициентами, основанного на понятии о контурном интеграле в комплексной плоскости, вычете комплексной функции и технике приближенного интегрирования по Риману методом Симпсона. Дано математическое обоснование корректности предложенного алгоритма, представлена программная реализация на языке программирования C++ при определенных допущениях, описаны особенности работы с полученной программой, приведены примеры работы алгоритма. Отдельно рассмотрено и доказано ключевое свойство полученного алгоритма — гарантированная сходимость (за исключением случая всех корней одного радиуса, но этот случай очень легко распознается аналитически) даже в случае полного отсутствия информации о взаимном расположении корней многочлена, реализуемая последовательным применением метода с уменьшенным шагом в случае неполного нахождения корней.

Ключевые слова

Многочлен, комплексная плоскость, контурный интеграл, алгоритм, корень, метод Симпсона, окружность, программирование, численные методы

Поступила в редакцию 19.04.2023

Введение. Многочлены являются одним из наиболее часто встречающихся в различных областях математики классом функций. Так, на нахождении их корней основан основной способ нахождения собственных чисел матриц (и, как следствие, решение линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений), многочлены имеют значительную связь с геометрией [1] (в алгебраической геометрии геометрические объекты рассматриваются как алгебраические многообразия: множества всех решений некоторой системы уравнений, образованной многочленами). Известным является утверждение об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел, называемое основной теоремой алгебры [2]. В этой теореме утверждается, что число корней многочлена над полем комплексных чисел совпадает с его степенью. Однако на нахождение этих корней наложено фундаментальное ограничение: в теории Галуа показано, что корни многочленов степени, превышающей пятую, в общем случае не выражаются в радикалах [3]. Это означает, что корни таких многочленов можно получить лишь приблизительно, но, при этом точность вычислений можно контролировать. Существует множество методов нахождения корней многочленов [4], каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками. В этой статье предложен метод, одним из основных преимуществ которого является гарантированная сходимость, обусловленная возможностью уменьшить шаг поиска для более точного прохода по области, приводящего к выявлению корней, которые на предыдущем этапе были расположены слишком близко и не могли быть различены. Сходимость имеет место при выполнении особого, но нарушаемого крайне редко условия.

К наиболее распространенным методам вычислительной математики относятся метод вычисления корней с помощью их представления как собственных чисел [5] сопровождающей матрицы рассматриваемого многочлена, метод Лобачевского — Греффе и метод Аберта. В данной статье описан альтернативный метод вычисления корней многочлена, основанный на теории вычетов и приближении определенных интегралов.

В статье принято соглашение о том, что у всех рассматриваемых многочленов свободный член не равен нулю: если это не так, то уравнение $p(x)=0$, где $p(x)$ — рассматриваемый многочлен, можно поделить на переменную в минимальной из входящих в многочлен степени с учетом нуля как корня соответствующей кратности и получить многочлен с ненулевым свободным членом.

Описание предложенного алгоритма и обоснование его корректности методами комплексного анализа. Рассмотрим произвольный многочлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами. Основная идея предлагаемого метода приближения корней заключается в том, что интеграл

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)},$$

где R с каждым шагом меняет свое значение, как только точка z_i, которая является корнем многочлена $p(x)$, попадет в круг $|z| \le R.$

Очевидно, что число корней многочлена равно его степени (алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел) и они являются некоторыми точками комплексной плоскости. Рассмотрим множество окружностей $\mathcal{O}$, параметризованное их радиусами с центром в начале координат. При этом для обеспечения возможности программирования добавим ограничения на это множество: радиусы могут изменяться только дискретно с таким шагом $\varepsilon > 0$, так что расстояние между любыми двумя корнями многочлена меньше ε (это не ограничивает общности: при нарушении этого условия нужно выполнить этот алгоритм снова с меньшим шагом, эта последовательность повторяется, пока это условие не будет выполнено. Поскольку между несовпадающими корнями расстояние ненулевое [6], такое значение ε существует), а множество всех возможных радиусов этих окружностей должно быть ограничено сверху некоторой константой C во избежание перебора до бесконечности (в программе значения ε и C вводятся пользователем). Теперь рассмотрим множество интегралов

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)},$$

параметризованное радиусами R из описанного выше множества радиусов. По основной теореме о вычетах [7] данные интегралы равны константе $2\pi i$, умноженной на сумму вычетов по точкам, входящим в круг $|z| \le R$.

Прежде чем исследовать приближение корней многочленов с использованием окружностей из $\mathcal{O}$, необходимо рассмотреть условие, при котором данный метод не обеспечивает сходимость. Поскольку предлагаемый алгоритм основан на изменении значения суммы вычетов при переходе через корень, единственным случаем, при котором корень не будет распознан, является случай нулевого вычета функции $\frac{1}{p(z)}$ в этом корне. Это возможно только при наличии кратных корней многочлена (что на практике уже встречается достаточно редко), а также специального расположения коэффициентов, при котором разложение функции $\frac{1}{p(z)}$ будет иметь коэффициент 0 при z^{-1}. Условия, наложенные на этот случай, связаны с вычислением вычета в полюсе конечного порядка по формуле [8]

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right] \right).$$

По этой причине в программной реализации этого алгоритма, предназначенной в большей степени для практического применения, этот случай не предусмотрен. Тем не менее приводится модификация алгоритма, позволяющая вычислять корни даже в этом случае. Для сведéния особого случая к случаю отсутствия нулевого вычета докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Если $p(z)$ — многочлен, свободный член которого не равен нулю, и

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{1}{p(z)} = 0,$$

где z_0 — корень $p(z)$, то

$$\exists q \in \left[1;\ \operatorname{ord}(p)-1\right] : \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{z^q}{p(z)} \ne 0.$$

Доказательство. Разложим функцию $\frac{1}{p(z)}$ в ряд Лорана в нуле (если ноль не является корнем этого многочлена, то замена $z \to z - z_0$, где z_0 — некоторый его корень, приведет к многочлену с нулевым корнем). Для этого сведем ее к геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_0 z^k} \frac{1}{1-\left(-p_1(z)\right)} = \frac{1}{a_0 z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-p_1(z)\right)^n ,$$

где k — кратность нулевого корня; p_1 — многочлен, полученный удалением свободного члена a_0 и последующим делением p на $a_0 z^k$. При этом, так как p_1 не содержит свободного члена, при $n \geq 1$ выражение $\left(-p_1(z)\right)^n$ не будет иметь свободного члена, а при $n = 0$ степень z у бесконечного многочлена

$$\frac{1}{a_0 z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-p_1(z)\right)^n$$

будет минимальной и равной $-k$. Выбирая

$$q = k - 1 \in \left[1;\ \operatorname{ord}(p) - 1\right] \cap \mathbb{Z}$$

(случай $k = 0$ невозможен, так как ноль является корнем рассматриваемого многочлена, а $k = 1$ невозможно, так как вычет в простом полюсе не равен нулю, верхняя граница определена с учетом того, что кратность корня не может превышать степень многочлена), находим, что коэффициент a_{-1} полученного разложения равен $\frac{1}{a_0} \neq 0.$ Лемма 1 доказана.

Таким образом, рассматриваемый метод приближения корней теоретически примени́м для любого многочлена, для которого можно различить корни с помощью итерации радиусов. К этому классу многочленов не относятся только многочлены с нулевыми вычетами в корнях и многочлены, корни которых расположены на одной окружности с центром в начале координат. Первый случай учитывает лемма 1, а все многочлены второго типа имеют вид $z^n = a;\ a \in \mathbb{R}$, принадлежность которому можно проверить перед применением алгоритма, и в случае положительного результата проверки найти все его корни как $\sqrt[n]{a}$, где корень n-й степени является многозначной комплексно-аналитической функцией.

Для приближения корней воспользуемся полярным представлением комплексного числа, в котором модуль корня может быть приближен радиусами окружностей из $\mathcal{O}$. Для нахождения модуля с заданной точностью δ приме́ним классический метод половинного деления (одним из основных преимуществ этого метода, послужившим причиной его выбора, стала его быстрая сходимость). Предположим, что R_1 — такой радиус окружности из $\mathcal{O}$, при котором корень z_0 не входит в ограничиваемый этой окружностью круг, но при следующей итерации в $\mathcal{O}$ полученная окружность R_2 ограничивает круг, в который корень z_0 входит (существование таких радиусов следует из определения множества $\mathcal{O}$). Индикатором вхождения корня в такой круг является изменение значения контурного интеграла

$$\int_{|z|=R} \frac{z^q dz}{p(z)} = 2\pi i \sum_{|z_0|<R} \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{z^q}{p(z)},$$

где q — значение, определенное в лемме 1. Рассмотрим окружность с радиусом $\frac{R_1+R_2}{2}$ и определим, входит ли в ограничиваемый ей круг корень z_0. Если ответ положительный, то заменим R_2 на $\frac{R_1+R_2}{2}$, если отрицательный — заменим R_1 на $\frac{R_1+R_2}{2}$. Этот процесс следует выполнять до тех пор, пока не будет выполнено условие $|R_1 - R_2| < \delta$. В качестве полученного модуля для определенности возьмем R_2. Учитывая, что корень многочлена расположен (приближенно) на окружности радиуса R_2, сведем задачу нахождения аргумента искомого корня к задаче минимизации [9] функции

$$f(\varphi) = \left| p\left(R_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)\right|,$$

где $\varphi \in [0; 2\pi)$ (для многочленов с вещественными коэффициентами достаточно рассмотреть только отрезок $\varphi \in [0; \pi]$, поскольку для таких многочленов все комплексные корни являются парами комплексно-сопряженных чисел). Для простоты реализации в программной части проведена оптимизация методом «грубой силы»: пользователь указывает число сегментов разбиения, отрезок $[0; \pi]$ делится на соответствующее количество частей, после чего происходит выбор значения, дающего минимальное значение $f(\varphi)$, путем последовательной подстановки каждой из точек, образованной разбиением отрезка на заданное число частей и сравнения полученного значения с текущим минимальным значением. Если новое значение дает меньший результат, то происходит перезапись текущего значения.

Таким образом, описанный выше алгоритм может быть использован для приближения одного комплексного корня многочлена. Для нахождения оставшихся корней необходимо поделить исходный многочлен на соответствующий найденному корню двучлен $z - z_0$ и снова применить данный алгоритм. Эту рекурсию завершают случаи, когда степень многочлена не выше пятой: для них существуют явные формулы нахождения корней. В программной реализации рекурсию завершают случаи, когда многочлен имеет первую и вторую степень, поскольку для этих случаев точные формулы корней значительно проще, чем для других степеней.

Итогом разработки описанного алгоритма стала доказанная построением соответствующего алгоритма теорема.

Теорема 1. Существует детерминированный алгоритм, который может приблизить все корни многочлена с заранее заданной точностью, не требующий отличных от многочлена и параметров точности данных (для алгоритма, удовлетворяющего этой теореме, также необходима отдельная обработка случая, в котором все корни расположены на одной комплексной окружности с центром в начале координат).

Пример 1. Поясним работу алгоритма на простом примере:

$$p(z)=(z-5)(z+2i+3)(z-2i-3)=z^3-11z^2+43z-65=0.$$

Система окружностей $\mathcal{O}$ для шага 1 максимального радиуса, равного 5, имеет вид, представленный на рис. 1, где горизонтальная ось обозначает $\operatorname{Re} z$, вертикальная ось — $\operatorname{Im} z$. При первом запуске будут найдены корни $z=3\pm 2i$, для которых произойдет изменение значения контурного интеграла с 0 до $2\pi i\cdot\left(\operatorname*{res}\limits_{z=3+2i} p(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=3-2i} p(z)\right)\neq 0$ при радиусе окружности, равном 4. Приблизительное значение модуля этого корня получается, как указано выше, методом половинного деления между радиусами 3 и 4. Затем происходит приближение комплексного аргумента корня. Отрезок $[0;\pi]$ делится точками на заданное число частей (например, 1000) и происходит поиск минимума функции $|p(z)|$, где z — комплексное число с найденным модулем и аргументом, равным последовательно подставляемым точкам из указанного разбиения $[0;\pi]$.

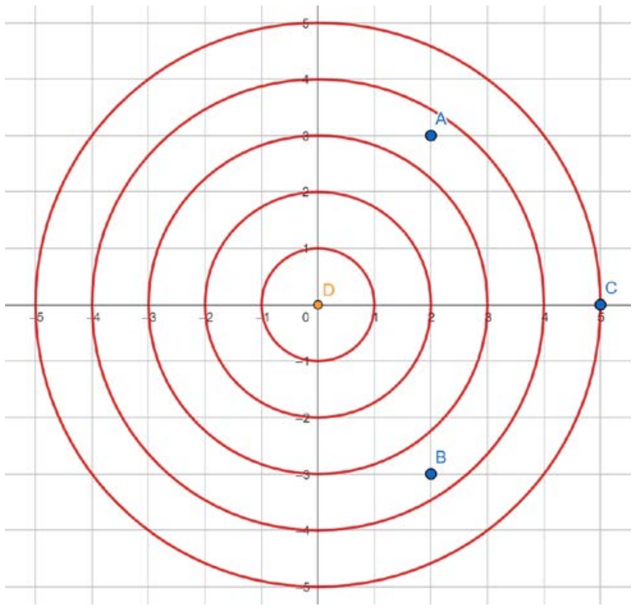

Рис. 1. Система окружностей $\mathcal{O}$

При нахождении корня с ненулевым аргументом программа автоматически добавляет в список корней комплексно-сопряженный к нему. Затем происходит деление многочлена на одночлены $z - z_0$, где z_0 является одним из найденных корней. После этого останется одночлен $z - 5$ (здесь точность найденных корней взята без погрешности для упрощения демонстрации), и этот случай завершает рекурсию, корень одночлена вычисляется по формуле и возвращается.

Стоит отдельно отметить потенциальную возможность применения данного алгоритма для приближения нулей произвольных функций, а не только многочленов. Но в таком случае существуют ограничения, которые связаны с произвольностью функций: обязательными условиями гарантированной сходимости является существование интегралов вида

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{f(z)}$$

и выполнения условия

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{1}{f(z)} \neq 0$$

в точках, являющихся нулями $f(z)$ (в другом случае алгоритм не распознает соответствующий корень, для некоторых классов функций возможно изменение вида подынтегральной функции для обеспечения выполнения этого условия). Также, в отличие от случая для многочленов, в случае произвольной функции число корней заранее неизвестно и может быть произвольным (в том числе и нулевым).

С теоретической стороны, область применимости описанного метода приближения корней не ограничена степенью или коэффициентами исследуемого многочлена. Однако ограниченность памяти вычислительной техники и особенно достаточно низкая для данного случая максимальная точность чисел с плавающей точкой, представленных в коде программы как объекты одного из фундаментальных типов данных C++ [10], накладывают значительное ограничение на максимальную степень многочлена, для которой в процессе вычислений погрешность не станет слишком большой и не возникнет «машинный ноль».

Примеры работы разработанного алгоритма. Для того чтобы продемонстрировать корректность данного метода, приведем несколько примеров. Программа принимает следующие параметры: шаг изменения радиуса окружности (step interval), число шагов (number of steps, задает ограничение сверху на множество окружностей $\mathcal{O}$), число шагов для приближения интеграла методом Симпсона (number of steps for integral approximation), точность вычисления модуля корней (main accuracy), число точек, на которые разбивается промежуток $[0; \pi]$ при поиске аргумента (tessellation depth) и коэффициенты многочлена в порядке возрастания степени переменной (список коэффициентов завершается нечисловым символом, например, буквой).

Программа выдает список найденных корней. Если определены не все корни, то программа также выдает коэффициенты оставшегося после деления многочлена, для которого нужно снова запустить программу, но с меньшим шагом или большим диапазоном радиусов для нахождения оставшихся корней. Если выдается очень маленькая мнимая или действительная часть, например 1.234e-6 = $= 1{,}234 \cdot 10^{-6}$, то высока вероятность того, что соответствующая часть равна нулю (корень является вещественным или чисто мнимым). При итерации радиусов также происходит их подстановка в многочлен: это помогает избежать интегрирования по контуру с особенностями подынтегральной функции в случае вещественного корня, равного итерируемому радиусу.

Пример 2. Найдем корни уравнения $z^3 - 11z^2 + 43z - 65 = 0$ (см. пример, использованный выше для описания алгоритма).

Результат выполнения программы:

```
Input the step interval:0.25
Input the number of steps:100
Input the number of steps for integral approximation:1000000
Input the main accuracy:0.00001
Input the tessellation depth for argument search:1000000
Input the polynomial coefficients in the form a+bx+...+cx^n (a is not 0):-65 43 -11 1 a
3+2i
3-2i
The total found roots are:
3+2i
3-2i
5
```

Пример 3. Найдем корни уравнения

$$z^5 + 9z^4 + 15z^3 + 65z^2 + 54z - 144 = (z-1)(z+2)(z+8)(z+3i)(z-3i) = 0.$$

Результат выполнения программы:

```
Input the step interval:1
Input the number of steps:10
Input the number of steps for integral approximation:1000000
Input the main accuracy:0.00001
Input the tessellation depth for argument search:1000000
Input the polynomial coefficients in the form a+bx+...+cx^n (a is not 0):-144 54 65 15 9 1 r
1.83697e-16+2.99999i
1.83697e-16-2.99999i
The total found roots are:
1
-2
1.83697e-16+2.99999i
1.83697e-16-2.99999i
-8
```

Пример 4. Найдем корни уравнения $3+z^2+8z^3+5z^5-7z^8+z^{10}=0.$

Результат выполнения программы:

```
Input the step interval:0.5
Input the number of steps:10
Input the number of steps for integral approximation:1000000
Input the main accuracy:0.00001
Input the tessellation depth for argument search:1000000
Input the polynomial coefficients in the form a+bx+...+cx^n (a is not 0):3 0 1 8 0 5 0 0 -7 0 1 r
0.413324+0.574547i
0.413324-0.574547i
-0.675697+2.12277e-06i
0.109435+0.893754i
0.109435-0.893754i
1.27966+4.02016e-06i
-0.760939+0.805182i
-0.760939-0.805182i
The total found roots are:
0.413324+0.574547i
0.413324-0.574547i
-0.675697+2.12277e-06i
0.109435+0.893754i
0.109435-0.893754i
1.27966+4.02016e-06i
-0.760939+0.805182i
-0.760939-0.805182i
-2.70279-3.07146e-06i
2.57519-3.07146e-06i
```

Заключение. Описанный и обоснованный в статье метод нахождения корней применим для любого класса многочленов (но для некоторых особых классов необходима соответствующая модификация, описанная выше) и обладает свойством гарантированной сходимости при правильном выборе шага и максимального радиуса (для выбора шага и радиуса не нужно иметь другую информацию, помимо значений коэффициентов многочлена, в случае неправильного шага его нужно уменьшать, пока не будут найдены корни, а в случае неправильно выбранного радиуса его нужно увеличивать). Также разработана программная реализация алгоритма на языке программирования C^{++}.

Литература

[1] Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии.* Москва, МЦНМО, 2007, 589 с.

[2] Fine B., Rosenberger G. *The Fundamental Theorem of Algebra.* New York, Springer-Verlag, 1997.

[3] Aluffi P. *Algebra: Chapter 0 (Graduate Studies in Mathematics).* American Mathematical Society, 2009, 713 p.

[4] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York, Cambridge University Press, 2007, 1262 p.
[5] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. *Матричные вычисления*. Москва, Мир, 1999.
[6] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. Москва, Лань, 2010, 368 с.
[7] Marsden J.E., Hoffman M.J. *Basic Complex Analysis*. W.H. Freeman, 516 p.
[8] Домрин А.В., Сергеев А.Г. *Лекции по комплексному анализу: В 2 ч. Ч. 1: Первое полугодие*. Москва, МИАН, 2004, 176 с.
[9] Карманов В.Г. *Математическое программирование*. Москва, Изд-во физ.-мат. литературы, 2004, 264 с.
[10] Страуструп Б. *Язык программирования С++. Специальное издание*. Москва, Бином-Пресс, 2007, 1104 с.

Абрамов Никита Константинович — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» факультета «Фундаментальные науки», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Димитриенко Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» факультета «Фундаментальные науки», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Абрамов Н.К. Применение теории вычетов для приближения комплексных корней многочленов произвольной степени. *Политехнический молодежный журнал*, 2023, № 05 (82). http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2023-5-891

INTRODUCING THE THEORY OF RESIDUES TO APPROXIMATE COMPLEX ROOTS OF THE POLYNOMIALS OF THE ARBITRARY ORDER

N.K. Abramov abramov.chess@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper presents results of development and implementation of a method for finding all the roots of a polynomial with real coefficients based on the concept of a contour integral in the complex plane, deduction of the complex function and technique of the approximate Riemann integration by the Simpson's rule. Mathematical substantiation of the proposed algorithm correctness is provided, software implementation in the C++ programming language is presented with certain assumptions, specifics of working with the resulting program are described, and examples of the algorithm are also presented. Separately, the key property of the obtained algorithm was considered and proved, i.e. the guaranteed convergence (excepting the case of all roots with the same radius, but this case could be very easily recognized analytically), even in the entire absence of information about relative position of the polynomial roots implemented by the method successive application with a reduced step in case of the incomplete roots finding.

Keywords

Polynomial, complex plane, contour integral, algorithm, root, Simpson's rule, circle, programming, numerical methods

Received 19.04.2023

References

[1] Shafarevich I.R. *Osnovy algebraicheskoy geometrii* [Fundamentals of Algebraic Geometry]. Moscow, MCCME Publ., 2007, 589 p. (In Russ.).

[2] Fine B., Rosenberger G. *The Fundamental Theorem of Algebra*. New York, Springer-Verlag, 1997.

[3] Aluffi P. *Algebra: Chapter 0 (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 2009, 713 p.

[4] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York, Cambridge University Press, 2007, 1262 p.

[5] Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Calculations*. JHU Press, 1996, 694 p. (Russ. ed.: Golub Dzh., Van Loun Ch. *Matrichnye vychisleniya*. Moscow, Mir Publ., 1999.).

[6] Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* [Introduction to Set Theory and General Topology]. Moscow, Lan Publ., 2010, 368 p. (In Russ.).

[7] Marsden J.E., Hoffman M.J. *Basic Complex Analysis*. W.H. Freeman, 516 p.

[8] Domrin A.V., Sergeev A.G. *Lektsii po kompleksnomu analizu: V 2 ch. Ch. 1: Pervoe polugodie* [Lectures on Complex Analysis: In 2 parts]. Moscow, MIAN Publ., 176 p. (In Russ.).

[9] Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical Programming]. Moscow, Publishing House of Phys.-Math. Literature, 2004, 264 p. (In Russ.).

[10] Stroustrup B. *The C++ programming language. Special edition*. AT&T Labs Murray Hill, New Jersey, 1997. (Russ. ed.: Straustrup B. *Yazyk programmirovaniya C++. Spetsial'noe izdanie*. Moscow, Binom-Press Publ., 2007, 1104 p.).

Abramov N.K. — Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Faculty of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Dimitrienko Y.I., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Faculty of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Abramov N.K. Introducing the theory of residues to approximate complex roots of the polynomials of the arbitrary order. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2023, no. 05 (82). (In Russ.). http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2023-5-891