

## ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ МАНИПУЛЯТОРА С ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

О.С. Коровин

kos21mm056@student.bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Статья посвящена поиску решения обратной задачи кинематики посредством различных методов. Методы, описанные в статье, можно условно разделить на две большие группы: точные и приближенные (численные) методы. Описанные в статье методы «блокировки шарнира», псевдообратной матрицы Якоби, штрафных функций и FABRIK применяются для решения обратной задачи кинематики для манипулятора с семью степенями свободы. Также в статье приведены основные формулы, используемые для расчетов при решении обратной задачи кинематики. Сделан вывод о том, что все рассмотренные методы в равной степени могут быть использованы при решении обратной задачи кинематики.

### Ключевые слова

Обратная задача кинематики, избыточный манипулятор, метод «блокировки шарнира», метод псевдообратной матрицы Якоби, метод штрафных функций, метод FABRIK

Поступила в редакцию 23.11.2022

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022

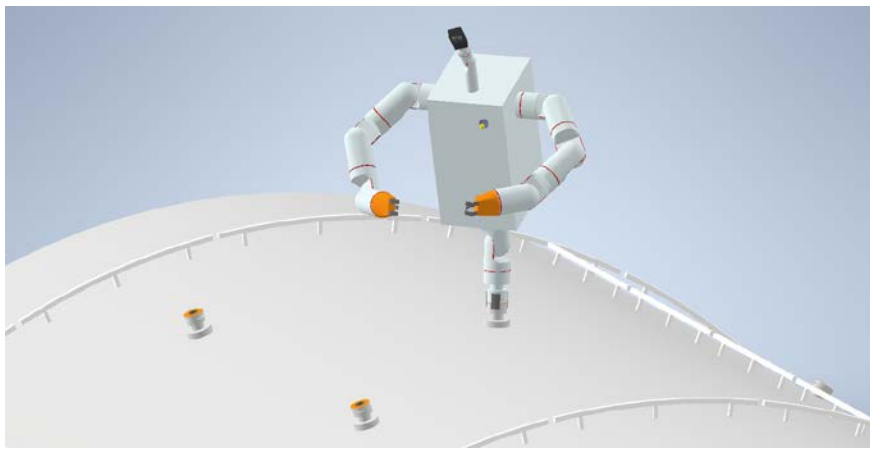
---

**Введение.** Поиск решения обратной задачи кинематики является одной из наиболее важных проблем в области кинематики и управления роботами. При решении данной задачи необходимо, прежде всего, найти обобщенные координаты робота-манипулятора, схват которого расположен в заданной точке рабочего пространства с определенной ориентацией. На практике решение подобных задач играет огромную роль в процессе исследования манипуляторов с избыточностью. Манипулятором с избыточностью называется манипулятор, число степеней свободы которого превышает число степеней свободы рабочего органа манипулятора [1]. Именно поэтому рассмотрение потенциально подходящих методов решения обратной задачи кинематики и возможность их применения для систем с избыточным числом степеней свободы имеет практическую значимость.

**Формулировка обратной задачи кинематики.** Сформулируем обратную задачу кинематики (ОЗК) на конкретном примере космического робота. Предполагается, что такой робот будет способен перемещаться по внешней поверхности космического аппарата и выполнять ряд задач внекорабельной деятельности (к задачам внекорабельной деятельности в данном случае относится ремонт космического аппарата с наружной стороны, перемещение различных грузов, сопровождение астронавтов и оказание помощи астронавтам при проведе-

нии исследований за бортом Международной космической станции). Разрабатываемый космический робот имеет два семизвенных манипулятора, которые при выполнении внекорабельной деятельности остаются свободными, поскольку робот прикреплен к базовой точке космического аппарата с помощью такелажного элемента (см. рисунок).

Обратная задача кинематики в нашем случае заключается в нахождении углов в шарнирах во время выполнения внекорабельной деятельности. Это необходимо для того, чтобы робот, обходя препятствия на своем пути, смог достичь нужной точки выполнения работ.



3D-модель космического робота

Источник. Составлено автором в программе Autodesk Inventor

Отметим, что ОЗК — это трудная задача, сложность которой зависит от степеней свободы манипулятора. Чем их больше, тем сложнее найти решение. Так, в рассматриваемом случае число степеней свободы равно семи, т. е. нужно ввести семь обобщенных координат:

$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7)^T,$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор обобщенных координат;  $q_i$  — обобщенная координата, представляющая собой угол поворота  $i$ -го шарнира,  $i = \overline{1, 7}$ .

Основная классификация методов решения обратной задачи кинематики. Для решения ОЗК существуют различные методы. Условно их можно подразделить на две большие группы:

- 1) точные методы;
- 2) приближенные (численные) методы.

Точные методы позволяют найти решение с абсолютной точностью, а приближенные — с заранее заданной. Вследствие этого точные методы имеют неко-

торое преимущество по сравнению с приближенными: решение ОЗК по этим методам находится быстрее. Поэтому этим методам и отдают предпочтение в большинстве случаев при решении ОЗК, но это не всегда возможно, поскольку для манипуляторов с избыточностью число решений, полученных точными методами, бесконечно много. Следовательно, для таких манипуляторов рекомендуется применять приближенные (численные) методы [2]. Рассмотрим более подробно методы решения ОЗК для представленного выше космического робота.

**Метод «блокировки шарнира».** Одним из способов нахождения углов поворотов в шарнирах является метод «блокировки шарнира». Его суть заключается в уменьшении числа степеней свободы манипулятора таким образом, чтобы их число стало равно числу степеней свободы рабочего органа. Это достигается путем присваивания одной из обобщенных координат некоторого значения. Следовательно, получаем ОЗК без избыточности, решение которой возможно с помощью точного метода — метода обратных преобразований. Этот метод основан на параметрах Денавита — Хартенберга, где для каждого сочленения вводят свою система координат. Затем составляют матрицы однородного преобразования и последовательно перемножаются. Таким образом, находим матрицу перехода  $T_7$  из начальной системы координат в систему координат рабочего органа:

$$T_7 = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdot \dots \cdot T_{6,7},$$

где  $T_{i-1,i}$  — матрица однородного преобразования для смежных звеньев.

Умножаем левую и правую часть на  $T_{0,1}^{-1}$  и получаем

$$T_{0,1}^{-1} \cdot T_7 = T_{1,2} \cdot \dots \cdot T_{6,7}. \quad (1)$$

Из соотношения (1) находим  $q_1$ , и далее повторяем эту процедуру для определения  $q_2 \dots q_6$ . Значение обобщенной координаты  $q_7$  известно, так как ранее мы ее уже определили («заблокировали») [3].

**Метод псевдообратной матрицы Якоби.** Еще одним методом является метод псевдообратной матрицы Якоби [4], который заключается в решении системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \mathbf{u}, \quad (2)$$

где  $\dot{\mathbf{q}}$  — вектор производных от обобщенных координат;  $\mathbf{J}^+$  — псевдообратная матрица;  $\mathbf{u}$  — вектор угловых и линейных скоростей.

Поскольку рассматриваемый манипулятор обладает избыточностью, псевдообратная матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1},$$

где  $\mathbf{J}$  — матрица Якоби.

Матрица Якоби представляется в виде

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x}{\partial q_7} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial y}{\partial q_7} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_7} \end{pmatrix},$$

где  $x, y, z$  — координаты рабочего органа,  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  — ориентация рабочего органа.

Решая систему (2), получаем значения обобщенных координат  $q_1, \dots, q_7$ .

**Метод штрафных функций.** Данный метод позволяет быстро и с высокой точностью найти решение ОЗК. Рассмотрим порядок применения этого метода [5].

Пусть заданы некоторые координаты положения схвата манипулятора  $x, y, z$ . Выберем критерий

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \rightarrow \min.$$

Также учтем расширенный критерий, в котором присутствуют дополнительные весовые коэффициенты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ :

$$J_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i + \frac{1}{2} \mu_1 \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \cdot \Delta y^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \cdot \Delta z^2 \rightarrow \min,$$

где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — разница между текущими координатами схвата и координатами, рассчитанными через обобщенные координаты.

В целях минимизации расширенного критерия применяют метод градиента.

Для этого вычисляют частные производные по обобщенным координатам  $\frac{\partial J_p}{\partial q_i}$ .

Таким образом, значения обобщенных координат определяют из соотношения

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \cdot \frac{\partial J_p}{\partial \mathbf{q}_i},$$

где  $\gamma > 0$  — коэффициент, определяющий скорость настройки.

**Метод FABRIK.** Решение ОЗК для манипулятора с избыточностью возможно также с помощью метода FABRIK (англ. *Forward and Backward Reaching Inverse Kinematics* — инверсная кинематика движения вперед и назад). FABRIK — метод, в котором используется система узлов, являющихся твердыми телами, которые соединены между собой ребрами, задающими движение и ограничивающими перемещение узлов относительно соседних ребер, т. е. перемещение одного ребра в звене ведет к движению всех ребер в цепочке [6].

Принципиальное отличие метода FABRIK от других заключается в том, что вместо матрицы поворота и преобразования вращения он сводит задачу к поиску положения точки на прямой. Работа данного метода осуществляется в два этапа. На первом этапе сравнивают расстояние от начального узла цепи до желаемой точки с длиной ребер самой цепи, проверяя, достижимо ли вообще такое решение. На втором этапе происходит отработка алгоритма достижения желаемой точки. Для этого необходимо выбрать конечный узел, лежащий в желаемой точке, и построить прямую от первоначального положения конечного узла до его текущего положения. Далее ребро, следующее за конечным узлом, укладывается на построенной прямой, и следующие за ним ребра поочередно подстраиваются под положение соседних ребер [7]. Таким образом, методом FABRIK удобно рассчитывать цепь, состоящую из нескольких разветвленных цепей, с заданием ограничений движения.

**Выводы.** Таким образом, одной из проблемных областей кинематики является решение обратной задачи. Сложность ОЗК напрямую зависит от числа степеней свободы манипулятора. Существует множество методов решения данной задачи. В статье рассмотрены некоторые методы решения ОЗК для разрабатываемого космического робота, имеющего семь степеней свободы. Несмотря на то что рассмотренные в статье методы основаны на различной теоретической базе, все они в равной степени могут быть использованы при решении ОЗК.

## Литература

- [1] Поезжаева Е.В., Закиров Е.А., Малёв М.В. Кинематика избыточного манипулятора робота для тушения пожаров. *Молодой ученый*, 2015, № 23, с. 204–206.  
URL: <https://moluch.ru/archive/103/23785/>
- [2] Обзор методов решения обратной задачи кинематики. *pandia.ru: веб-сайт*. URL: <https://pandia.ru/text/80/247/55896.php> (дата обращения: 29.04.2022).
- [3] Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
- [4] Ростов Н.В. Анализ алгоритмов решения обратных задач кинематики в системах управления движения роботов. *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление*, 2014, № 5, с. 93–99.
- [5] Дыда А.А., Оськин Д.А. Решение обратной задачи кинематики для манипуляционного робота методом штрафных функций. *Фундаментальные исследования*, 2015, № 11, с. 673–677.

- [6] Aristidou A., Lasenby J. FABRIK: a fast, iterative solver for the Inverse Kinematics problem. *Graph. Models*, 2011, vol. 73, no. 5, pp. 243–260.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gmod.2011.05.003>
- [7] Tao S., Yang Y. Collision-free motion planning of a virtual arm based on the FABRIK algorithm. *Robotica*, 2017, vol. 35, no. 6, pp. 1431–1450.  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263574716000205>

**Коровин Олег Сергеевич** — студент кафедры «Робототехнические системы и мехатроника», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Рубцов Василий Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехнические системы и мехатроника», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:**

Коровин О.С. Обзор методов решения обратной задачи кинематики для манипулятора с избыточностью. *Политехнический молодежный журнал*, 2022, № 12(77).  
<http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2022-12-846>

## REVIEW OF METHODS FOR SOLVING THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM FOR AN ARM WITH REDUNDANCY

O.S. Korovin

kos21mm056@student.bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

The article is devoted to the search for the solution of the inverse kinematics problem by means of various methods. The methods described in the article can be divided into two large groups: exact and approximate (numerical) methods. The described in the article methods of "hinge locking", pseudo inverse Jacobian matrix, penalty functions and FABRIK are applied to solve the inverse problem of kinematics for a manipulator with seven degrees of freedom. The paper also presents the basic formulas used for calculations when solving the inverse kinematics problem. It is concluded that all of the considered methods can equally be used in solving the inverse problem of kinematics.

### Keywords

Inverse kinematics problem, redundant arm, hinge lock method, pseudo inverse Jacobian matrix method, penalty function method, FABRIK method

Received 23.11.2022

© Bauman Moscow State Technical University, 2022

---

### References

- [1] Poezhaeva E.V., Zakirov E.A., Malev M.V. Kinematics of excessive manipulator robot for fire extinction. *Molodoy uchenyy* [Young Scientist], 2015, no. 23, pp. 204–206. URL: <https://moluch.ru/archive/103/23785/> (in Russ.).
- [2] Obzor metodov resheniya obratnoy zadachi kinematiki [Review on methods of solving inverse kinematic problems]. *pandia.ru: website* (in Russ.). URL: <https://pandia.ru/text/80/247/55896.php> (accessed: 29.04.2022).
- [3] Zenkevich S.L., Yushchenko A.S. Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami [Fundamentals of robot control]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2000 (in Russ.).
- [4] Rostov N.V. Algorithm analysis for solving the inverse kinematic problems in robot motion control systems. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie* [St. Petersburg Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems], 2014, no. 5, pp. 93–99 (in Russ.).
- [5] Dyda A.A., Oskin D.A. Inverse kinematics problem for manipulator robot by penalty function method. *Fundamentalnye issledovaniya* [Fundamental research], 2015, no. 11, pp. 673–677 (in Russ.).
- [6] Aristidou A., Lasenby J. FABRIK: a fast, iterative solver for the Inverse Kinematics problem. *Graph. Models*, 2011, vol. 73, no. 5, pp. 243–260. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gmod.2011.05.003>
- [7] Tao S., Yang Y. Collision-free motion planning of a virtual arm based on the FABRIK algorithm. *Robotica*, 2017, vol. 35, no. 6, pp. 1431–1450. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263574716000205>

**Korovin O.S.** — Student, Department of Robotics systems and mechatronics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Rubtsov V.I., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Robotics systems and mechatronics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Please cite this article in English as:**

Korovin O.S. Review of methods for solving the inverse kinematics problem for an arm with redundancy. *Politekhnicheskij molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2022, no. 12(77). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2022-12-846.html> (in Russ.).