

**РЕАЛИЗАЦИЯ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДВУХЗВЕННОГО МАЯТНИКА****Г.В. Лысухо**

lyysukhogv@student.bmstu.ru

SPIN-код: 8276-4150

**А.Л. Масленников**

amas@bmstu.ru

SPIN-код: 7087-6303

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация****Аннотация**

Для оценки вектора состояния динамических систем применяют различные виды калмановской фильтрации. Для нелинейных систем можно использовать расширенный или сигма-точечный фильтр Калмана, которые имеют ряд сложностей при практической реализации. Наличие этих сложностей приводит к повышению требований к вычислительным ресурсам, а также к возможной потере алгоритмом вычислительной устойчивости и увеличению ошибки оценки вектора состояния. В статье рассмотрено применение гибридной версии расширенного фильтра Калмана первого порядка, которая позволяет устранить ряд сложностей при практической реализации. В качестве математической модели выбрана модель двухзвенного маятника. При используемой реализации фильтра Калмана гарантируется симметричность априорной ковариационной матрицы, а также применяются численные методы вычисления матрицы первых частных производных и QR-разложения при вычислении матрицы усиления Калмана.

**Ключевые слова**

Расширенный фильтр Калмана, гибридный фильтр Калмана, нелинейные системы, двухзвенный маятник, метод конечных разностей, QR-разложение, оценка вектора состояния, теория оценивания

Поступила в редакцию 02.07.2019

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

**Введение.** В системах автоматического управления зачастую требуется оценивать вектор состояния (или просто состояние системы), например, в задачах синтеза дискретных систем или задачах фильтрации навигационной информации [1, 2]. На практике численную оценку вектора состояния при наличии входных и измерительных шумов можно получить с помощью различных фильтров Калмана (линейного, расширенного или сигма-точечного) [3–6]. При неизвестных параметрах входных и измерительных шумов или их нестационарности, как правило, применяют адаптивные фильтры Калмана, которые не являются отдельным видом калмановских фильтров, а расширяют функционал линейного, расширенного или сигма-точечного фильтров Калмана [7–9].

Для линейных систем можно использовать линейные фильтры Калмана, а для нелинейных следует применять расширенные или сигма-точечные фильтры Калмана, практическая реализация которых сопряжена с рядом сложностей. Во-

первых, вычислительная устойчивость фильтров Калмана сильно зависит от точности задания начальных условий и знания ковариационных матриц шумов, которые априори неизвестны [4, 5]. Во-вторых, для расширенного фильтра Калмана первого порядка необходимо предварительно получить в аналитическом виде матрицу первых частных производных — матрицу Якоби, что для сложных динамических систем может быть крайне затруднительным. Помимо этого для вычисления матрицы Якоби (как и ряда других векторно-матричных операций) на каждой итерации фильтра Калмана требуется высокая производительность контроллера, что приводит к необходимости оптимизации численных методов расчета.

В работе рассмотрено применение расширенного фильтра Калмана первого порядка к оценке вектора состояния нелинейной модели непрерывной системы двухзвенного маятника. В статье описана нелинейная математическая модель рассматриваемой физической системы, приведен обобщенный алгоритм расширенного фильтра Калмана первого порядка, отмечен ряд сложностей его практической реализации и указаны пути их устранения. В частности, для оптимизации вычисления оценки вектора состояния применены численные подходы к определению матрицы Якоби (не требует нахождения первых производных в аналитическом виде) и QR-разложения при вычислении апостериорной оценки вектора состояния. В заключении приведены результаты оценки вектора состояния с помощью реализованного фильтра Калмана.

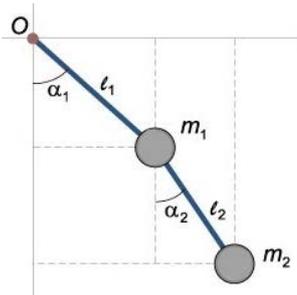


Рис. 1. Кинематическая схема двухзвенного маятника

**Математическая модель двухзвенного маятника.** Двухзвенный маятник — непрерывная динамическая система, состоящая из двух звеньев, кинематическая схема которой представлена на рис. 1. Двухзвенный маятник, в том числе и перевернутый (или обратный), очень часто применяют в качестве упрощенной модели различных систем, например, верхней части туловища человека [10–12].

Математическая модель невозмущенного двухзвенного маятника состоит из двух дифференциальных уравнений, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 = \frac{\left( -m_2 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + m_2 g l_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \alpha_2 + \right. \\ \left. + \frac{l_1}{l_2} \mu_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \alpha_1 - \mu \dot{\alpha}_1 \right)}{(m_1 + m_2) l_1^2 - m_2 l_1^2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}; \\ \ddot{\alpha}_2 = \frac{m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2 l_2 g \sin \alpha_2 - \mu_2 \dot{\alpha}_2 - m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \ddot{\alpha}_1}{m_2 l_2^2}, \end{cases}$$

где  $\alpha$  — угол поворота;  $\dot{\alpha}$  — угловая скорость;  $\ddot{\alpha}$  — угловое ускорение;  $g$  — ускорение свободного падения;  $l$  — длина;  $m$  — масса материальной точки;

$\mu$  — коэффициент диссипации, а индексы 1 и 2 указывают на порядковый номер соответствующего звена.

Для решения задачи численного моделирования системы и оценки вектора состояния описание системы необходимо получить в форме Коши с учетом наличия внешних управляющих моментов  $u_1$  и  $u_2$ . Для этого выполняют замену переменных:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор состояния системы, а динамика системы описывается с помощью четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

где правые части имеют следующий поэлементный вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2; \\ f_2 &= \frac{\left( -m_2 l_1^2 x_2^2 B_1 B_2 + m_2 g l_1 B_1 B_4 + \frac{l_1}{l_2} \mu_2 x_4 B_1 - \right. \\ &\quad \left. - m_2 l_1 l_2 x_4^2 B_2 - (m_1 + m_2) g l_1 B_3 - \mu_1 x_2 \right)}{(m_1 + m_2) l_1^2 - m_2 l_1^2 B_1^2} + u_1; \\ f_3 &= x_4; \\ f_4 &= \frac{m_2 l_1 l_2 x_2^2 B_2 - m_2 l_2 g B_4 - \mu_2 x_4 - m_2 l_1 l_2 B_1 \dot{x}_2}{m_2 l_2^2} + u_2 \end{aligned}$$

с учетом следующих обозначений:

$$\begin{aligned} B_1 &= \cos(x_1 - x_3); \\ B_2 &= \sin(x_1 - x_3); \\ B_3 &= \sin x_1; \\ B_4 &= \sin x_3. \end{aligned}$$

Моделирование системы можно реализовать явным методом Рунге — Кутты четвертого порядка, в котором после инициализации начальных условий  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ , которые в данном случае можно принять нулевыми, на каждой  $k$ -й итерации для момента времени  $t_k$  (при  $h = t_k - t_{k-1}$ ) вычисляют значения  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , а затем и решение  $\mathbf{x}_{k+1}$ :

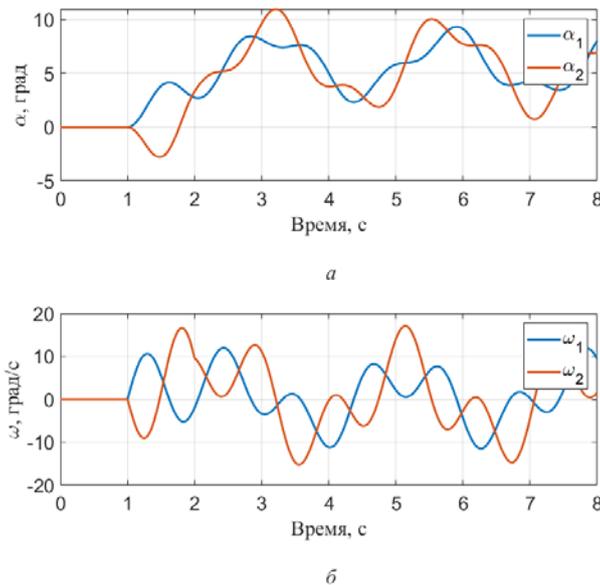
$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k);$$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= f(x_k + 0,5hK_1, t_k + 0,5h); \\
 K_3 &= f(x_k + 0,5hK_2, t_k + 0,5h); \\
 K_4 &= f(x_k + hK_3, t_k + h); \\
 x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).
 \end{aligned}$$

Модель измерений рассматриваемой системы сформирована для случая измерения двух углов — углов поворота каждого из звеньев, и в общем виде записывается следующим образом:

$$y_k = Cx_k.$$

Результат моделирования системы явным методом Рунге — Кутты четвертого порядка при ступенчатом входном воздействии ( $u_1$  и  $u_2$  равны единице с момента времени  $t = 1$  с) без наличия входных и измерительных шумов представлен на рис. 2.



**Рис. 2.** Результат моделирования нелинейной модели двухзвенного маятника при ступенчатом входном воздействии:

$a$  — углы поворота звеньев;  $b$  — угловые скорости

Добавление входных и измерительных шумов реализуется следующим образом. В правых частях дифференциальных уравнений присутствует  $u_k$ , которое можно представить в виде

$$u_k = r_k + w_k,$$

где  $r_k$  — полезный входной сигнал;  $w_k$  — входной шум. Добавление измерительного шума  $v_k$  реализуется использованием следующей модели измерений:

$$y_k = Cx_k + v_k.$$

**Расширенный фильтр Калмана.** Для рассматриваемой нелинейной непрерывной системы оценка  $\hat{x}$  вектора состояния  $x$ , где первый и третий элемент — углы поворота звеньев, а второй и четвертый — соответствующие угловые скорости, осуществляется с помощью гибридного варианта расширенного фильтра Калмана. Для этого сначала задают начальные значения апостериорных оценок вектора состояния  $\hat{x}_{0|0}$  и ковариационной матрицы  $P_{0|0}$ :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{0|0} &= E[x_0]; \\ P_{0|0} &= \text{diag}(\text{VAR}[x_0]).\end{aligned}$$

Определение начальных условий не является тривиальной задачей и требует либо предварительного получения данных от системы с последующим расчетом начальных условий (не всегда можно реализовать на практике ввиду необходимости получения оценок сразу после запуска системы), либо априорного знания начального значения вектора состояния и характеристик входного шума (как правило, подобная информация априори отсутствует), либо двойного прохода фильтром Калмана имеющегося набора данных (не работает в режиме реального времени), либо оценки начальных условий в процессе работы фильтра Кармана (практически не реализуемая задача). В данной работе оценка  $\hat{x}_{0|0}$  принята нулевой, а  $P_{0|0}$  инициализируется как диагональная матрица с заведомо меньшими значениями, которые может принимать матрица  $P$  (исходя из возможных входных и измерительных шумов). В этом случае оценки вектора состояния и ковариационной матрицы будут ненадежны лишь на некотором не очень большом начальном интервале времени.

После инициализации начальных условий запускается итерационный процесс, каждая итерация которого состоит из двух этапов. На первом этапе (этап прогноза) вычисляется априорная оценка вектора состояния  $\hat{x}_{k|k-1}$  и априорная оценка ковариационной матрицы  $P_{k|k}$  в моменты времени  $t_k$ :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= \hat{x}(t_k); \\ P_{k|k-1} &= P(t_k)\end{aligned}$$

как результат решения двух дифференциальных уравнений на интервале от  $t_{k-1}$  до  $t_k$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, t); \\ \dot{P}(t) &= F_k P + P F_k^T + Q_k,\end{aligned}$$

где  $F_k$  — матрица первых частных производных (матрица Якоби), вычисленная в момент времени  $t_k$  по известному значению апостериорной оценки  $\hat{x}_{k-1|k-1}$ ;  $Q_k$  — ковариационная матрица входных шумов. Отметим, что достаточно точ-

ное решение можно получить за одну итерацию, например метода Рунге — Кутты четвертого порядка, при выборе достаточно малого шага  $h$ .

На втором этапе расширенного фильтра Калмана (этап коррекции) определяются апостериорные оценки вектора состояния  $\hat{x}_{k|k}$  и ковариационной матрицы  $P_{k|k}$  по рассчитанным ранее априорным оценкам  $\hat{x}_{k|k-1}$  и  $P_{k|k-1}$ . Алгоритм этапа коррекции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k; \\ z_k &= y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}); \\ K_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1}; \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k; \\ P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T; \\ H_k &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}} = C, \end{aligned}$$

где  $H_k$  — матрица первых частных производных модели измерений в момент времени  $t_k$ , которую считаем постоянной и равной  $C$ , что вполне согласуется с практическими задачами с позиции линейной модели измерений;  $R_k$  — ковариационная матрица измерительных шумов.

Затем осуществляется переход на следующий  $k+1$  шаг, где полученные апостериорные оценки  $\hat{x}_{k|k}$  и  $P_{k|k}$  становятся  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  и  $P_{k-1|k-1}$  и весь процесс повторяется.

**Сложности реализации гибридной версии расширенного фильтра Калмана.** Одной из проблем использования фильтров Калмана является потеря алгоритмом вычислительной устойчивости, причиной чего могут быть вычислительные погрешности, неточное знание начальных условий или модели системы, неточное знание ковариационных матриц входных и измерительных шумов, особенно в случае их нестационарности. Помимо этого ряд сложностей возникает при практической реализации фильтров Калмана на микроконтроллерах (в системах реального времени), вычислительной мощности которых может быть недостаточно для вычисления на каждой итерации матрицы Якоби  $F_k$  и нахождения обратной матрицы  $S_k^{-1}$ , особенно для систем большого порядка. Далее рассмотрен ряд решений, которые позволяют снизить объем вычислений и вероятность потери устойчивости при оценке вектора состояния гибридным вариантом расширенного фильтра Калмана [13, 14].

*Несимметричность априорной ковариационной матрицы.* Вычисляемая оценка априорной ковариационной матрицы  $P_{k|k-1}$  при наличии вычислительных погрешностей может оказаться несимметричной матрицей, что приведет к увеличению ошибки оценки вектора  $x$  вплоть до потери устойчивости. Для получения симметричной матрицы  $P_{k|k-1}$  решение соответствующего дифферен-

циального уравнения находим с использованием разложения Холецкого, где матрица  $P$  представлена как  $P = LL^T$ , а дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$\dot{P}(t) = F_k LL^T + LL^T F_k^T + Q_k.$$

*Сложность вычисления матрицы Якоби.* Помимо аналитически обширных преобразований, которые могут потребоваться для получения матрицы Якоби, для ее вычисления в каждый момент времени  $t_k$  могут понадобиться существенные вычислительные ресурсы. Решением этой проблемы является численный расчет матрицы Якоби на каждом шаге, что реализуется, например, с использованием метода конечных разностей (центральных разностей второго порядка), где на каждом шаге расширенного фильтра Калмана сначала инициализируется вектор  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},$$

а затем для  $i=1 \dots n$ , где  $n$  — размерность вектора  $\mathbf{m}$ , матрица Якоби  $J$  вычисляется по столбцам в соответствии со следующим алгоритмом:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^+(i) &= \mathbf{m}(i) + \varepsilon; \\ \mathbf{m}^-(i) &= \mathbf{m}(i) - \varepsilon; \\ J(:, i) &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{m}^-, t) - \mathbf{f}(\mathbf{m}^+, t)}{2\varepsilon}; \\ \mathbf{m}^+(i) &= \mathbf{m}(i); \\ \mathbf{m}^-(i) &= \mathbf{m}(i). \end{aligned}$$

Определяемая таким образом матрица  $J$  является искомой матрицей  $F_k$  — матрицей первых частных производных, но при этом не требуется ни предварительных аналитических, ни громоздких численных расчетов. Отметим, что в этом случае сознательно вносится вычислительная погрешность, т. е. матрица Якоби высчитывается приближенно. Снижение этой погрешности возможно за счет увеличения порядка используемой центральной конечной разности.

Для рассматриваемой системы результаты моделирования показали, что ошибка оценки вектора состояния при численном определении матрицы Якоби незначительна по сравнению с рассчитываемой аналитически, что проиллюстрировано с помощью двух критериев (рис. 3, 4). Первый критерий — это след ковариационной матрицы  $P_{k|k}$ , который соизмерим как для случая численного, так и для случая аналитического определения матрицы Якоби. Второй — это значение относительной ошибки оценки каждого из четырех элементов вектора состояния, которые также совпадают по порядку для рассматриваемых двух случаев.

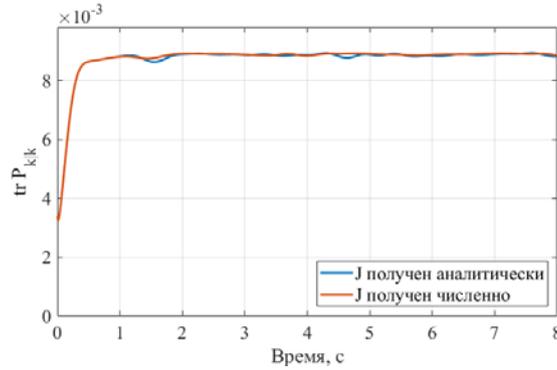


Рис. 3. След матрицы  $P_{k|k}$  при различных методах вычисления матрицы Якоби

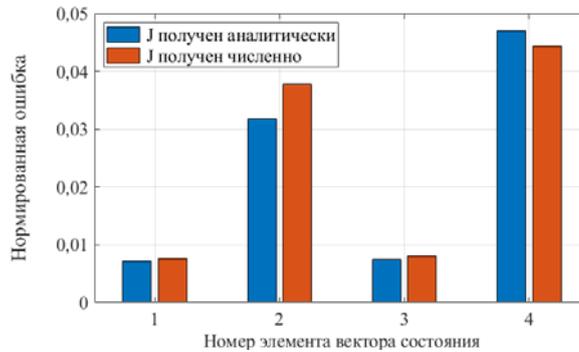


Рис. 4. Нормированная ошибка оценки элементов вектора состояния при различных методах вычисления матрицы Якоби

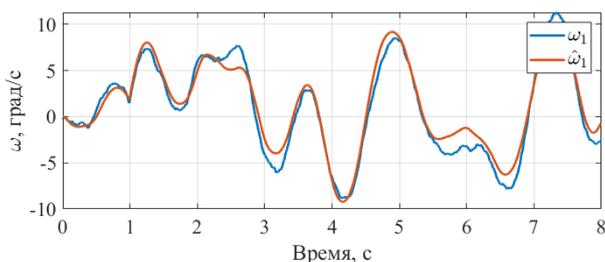
Сложность вычисления обратной матрицы  $S_k^{-1}$ . Этап коррекции содержит вычисление обратной матрицы  $S_k^{-1}$ , что для систем с большим порядком существенно загружает вычислитель. Сократить объем вычислений при вычислении обратной матрицы можно за счет использования QR-разложения. Для этого сначала вычисляют матрицу  $S_k$ , а затем определяют унитарную матрицу  $Q$  и верхнетреугольную матрицу  $R$ , формирующие QR-разложение матрицы  $S_k$ . В результате можно получить более эффективное (с позиции объема вычислений) определение обратной матрицы  $S_k^{-1}$  следующим образом:

$$S_k^{-1} = Q^T R.$$

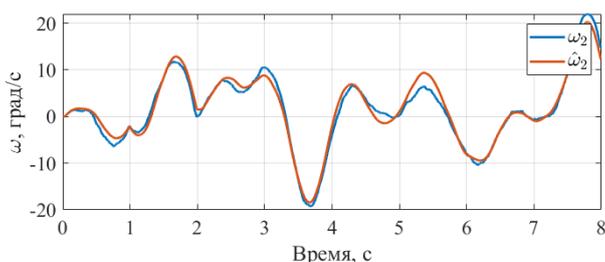
Другие сложности использования гибридной версии расширенного фильтра Калмана. Неточное знание модели, которое может привести к существенной ошибке оценки вектора состояния, можно компенсировать решением задачи идентификации, однако этот подход также имеет свои сложности. Неточное знание ковариационных матриц входных и измерительных шумов, особенно в случае их нестационарности, можно компенсировать за счет их непосред-

ственной оценки на каждой итерации фильтра Калмана. В этом случае, как правило, применяют адаптивные фильтры Калмана [15, 16]. Для решения задачи адаптивной калмановской фильтрации, как правило, требуется получение гладкой оценки вектора состояния  $x$ , т. е. необходимо дополнительно отфильтровывать входные шумы, в то время как фильтры Калмана, по сути, фильтруют только измерительные шумы.

**Результаты моделирования.** С использованием QR-разложения при вычислении обратной матрицы  $S_k^{-1}$ , разложения Холецкого при вычислении априорной оценки ковариационной матрицы  $P_{k|k-1}$  и численным расчетом матрицы первых частных производных при наличии входных и измерительных шумов в результате применения расширенного фильтра Калмана к рассматриваемой системе получаем следующие графики оценок угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 5). Как видно, эти оценки близки к своим истинным значениям, где истиной считается значения вектора  $x$  с аддитивным входным шумом. Аналогичные результаты получаются и для оценки углов поворота звеньев, графики которых представлены на рис. 6.



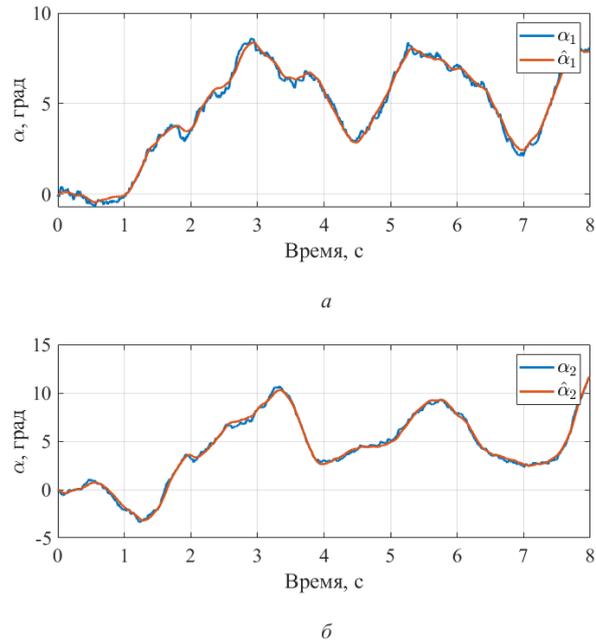
а



б

**Рис. 5.** Оценка угловых скоростей звеньев двухзвенного маятника гибридным вариантом расширенного фильтра Калмана:  
а — для первого звена; б — для второго звена

**Выводы.** В работе рассмотрена практическая реализация гибридного варианта расширенного фильтра Калмана для оценки состояния непрерывной динамической системы — двухзвенного маятника. В реализации гарантируется получение симметричной ковариационной матрицы, что снижает вероятность потери устойчивости алгоритмом, численно рассчитывается матрица первых



**Рис. 6.** Оценка углов поворота звеньев двухзвенного маятника гибридным вариантом расширенного фильтра Калмана  
*a* — для первого звена; *б* — для второго звена

частных производных (матрица Якоби) при определении априорных оценок. Вычисление обратной матрицы  $S_k^{-1}$  реализуется в результате QR-разложения, что позволяет уменьшить объем вычислений.

### Литература

- [1] Деменков Н.П. Статистическая динамика систем управления. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
- [2] Деменков Н.П., Микрин Е.А. Управление в технических системах. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
- [3] Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.*, 1960, vol. 82, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552 URL: <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1430402>
- [4] Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering. Theory and practice using MATLAB. John Wiley & Sons, 2002.
- [5] Haykin S. Kalman filtering and neural networks. John Wiley & Sons, 2001.
- [6] Julier S.J., Uhlmann J.K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *Proc. SPIE*, 1997, vol. 3068, pp. 182–194. DOI: 10.1117/12.280797 URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/3068/1/New-extension-of-the-Kalman-filter-to-nonlinear-systems/10.1117/12.280797.short?SSO=1>
- [7] Ananthasayanam M.R., Mohan M.S., Gemson R.M.O., et al. A heuristic reference recursive recipe for adaptively tuning the Kalman filter statistics part-1: formulation and simulation studies. *Sādhanā*, 2016, vol. 41, no. 12, pp. 1473–1490. DOI: 10.1007/s12046-016-0562-z URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12046-016-0562-z>

- [8] Mohan S.M., Naik N., Gemson R.M.O., et al. Introduction to the Kalman filter and tuning its statistics for near optimal estimates and Cramer Rao Bound. Indian Academy of Sciences, 2015.
- [9] Odelson B.J., Rajamani M.R., Rawlings J.B. A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances. *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 303–308. DOI: 10.1016/j.automatica.2005.09.006 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109805003262>
- [10] Шангареев А.Т., Тимаков С.Н., Платонов В.Н. Применение фильтра Калмана к задачам управления причаливанием космических аппаратов. *Космическая техника и технологии*, 2016, № 4, с. 57–66.
- [11] Gage W.H., Winter D.A., Frank J.S., et al. Kinematic and kinetic validity of the inverted pendulum model in quiet standing. *Gait Posture*, 2004, vol. 19, no. 2, pp. 124–132. DOI: 10.1016/S0966-6362(03)00037-7 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0966636203000377>
- [12] Александров А.В., Фролов А.А., Масьон Ж. Стратегия поддержания равновесия человека при наклоне корпуса вперед на узкой опоре. *Российский журнал биомеханики*, 2002, № 4, с. 63–78.
- [13] Frogerais P., Bellanger J.-J., Senhadji L. Various ways to compute the continuous-discrete extended Kalman filter. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 1000–1004. DOI: 10.1109/TAC.2011.2168129 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6018993>
- [14] Kulikov G.Y., Kulikova M.V. Accurate numerical implementation of the continuous-discrete extended Kalman filter. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2014, vol. 59, no. 1, pp. 273–279. DOI: 10.1109/TAC.2013.2272136 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6553080>
- [15] Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1970, vol. 15, no. 2, pp. 175–184. DOI: 10.1109/TAC.1970.1099422 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1099422>
- [16] Yuanxi Y., Weiguang G. An optimal adaptive Kalman filter. *J. Geodesy*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 177–183. DOI: 10.1007/s00190-006-0041-0 URL: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00190-006-0041-0>

**Лысухо Григорий Викторович** — студент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Масленников Андрей Леонидович** — ассистент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Задорожная Наталия Михайловна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

---

**EXTENDED KALMAN FILTER APPLICATION TO THE NONLINEAR TWO-LINK PENDULUM MODEL**
**G.V. Lysukho**

lyysukhogv@student.bmstu.ru

SPIN-code: 8276-4150

**A.L. Maslennikov**

amas@bmstu.ru

SPIN-code: 7087-6303

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation****Abstract**

Various types of Kalman Filter are typically used to estimate state vector of dynamical systems. Particularly for nonlinear systems the Extended or Sigma-point Kalman filter are widely, but both of them have practical limitations. Those limitations could lead to instability of the algorithm and to increasing of estimation error. In this paper, we present the practical realization of the first-order Extended Kalman filter that is addressing those limitations with purpose to estimate the state of the continuous-time nonlinear two-link pendulum model with discrete-time measurements. In this realization symmetry of a priori covariance matrix is guaranteed and computational efficiency is increased by utilizing numerical computation of Jacobi matrix and QR-decomposition in computing Kalman gain.

**Keywords**

Extended Kalman filter, Hybrid Kalman filter, nonlinear system, two-link pendulum, numerical differentiation, QR-decomposition, state estimation, estimation theory

Received 02.07.2019

© Bauman Moscow State Technical University, 2019

**References**

- [1] Demenkov N.P. Statisticheskaya dinamika sistem upravleniya [Statistical dynamics of control systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2017 (in Russ.).
- [2] Demenkov N.P., Mikrin E.A. Upravlenie v tekhnicheskikh sistemakh. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2017 (in Russ.).
- [3] Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.*, 1960, vol. 82, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552 URL: <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1430402>
- [4] Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering. Theory and practice using MATLAB. John Wiley & Sons, 2002.
- [5] Haykin S. Kalman filtering and neural networks. John Wiley & Sons, 2001.
- [6] Julier S.J., Uhlmann J.K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *Proc. SPIE*, 1997, vol. 3068, pp. 182–194. DOI: 10.1117/12.280797 URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/3068/1/New-extension-of-the-Kalman-filter-to-nonlinear-systems/10.1117/12.280797.short?SSO=1>
- [7] Ananthasayanam M.R., Mohan M.S., Gemson R.M.O., et al. A heuristic reference recursive recipe for adaptively tuning the Kalman filter statistics part-1: formulation and simulation studies. *Sādhanā*, 2016, vol. 41, no. 12, pp. 1473–1490. DOI: 10.1007/s12046-016-0562-z URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12046-016-0562-z>

- [8] Mohan S.M., Naik N., Gemson R.M.O., et al. Introduction to the Kalman filter and tuning its statistics for near optimal estimates and Cramer Rao Bound. Indian Academy of Sciences, 2015.
- [9] Odelson B.J., Rajamani M.R., Rawlings J.B. A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances. *Automatics*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 303–308. DOI: 10.1016/j.automatica.2005.09.006 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109805003262>
- [10] Shangareev A.T., Timakov S.N., Platonov V.N. The Kalman filter application to the problems of spacecraft berthing control. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* [Space technique and technologies], 2016, no. 4, pp. 57–66 (in Russ.).
- [11] Gage W.H., Winter D.A., Frank J.S., et al. Kinematic and kinetic validity of the inverted pendulum model in quiet standing. *Gait Posture*, 2004, vol. 19, no. 2, pp. 124–132. DOI: 10.1016/S0966-6362(03)00037-7 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0966636203000377>
- [12] Aleksandrov A.V., Frolov A.A., Mas'on Zh. Strategy of equilibrium maintenance during human forward upper trunk bending on the narrow support. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2002, no. 4, pp. 63–78 (in Russ.).
- [13] Frogerais P., Bellanger J.-J., Senhadji L. Various ways to compute the continuous-discrete extended Kalman filter. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 1000–1004. DOI: 10.1109/TAC.2011.2168129 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6018993>
- [14] Kulikov G.Y., Kulikova M.V. Accurate numerical implementation of the continuous-discrete extended Kalman filter. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2014, vol. 59, no. 1, pp. 273–279. DOI: 10.1109/TAC.2013.2272136 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6553080>
- [15] Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1970, vol. 15, no. 2, pp. 175–184. DOI: 10.1109/TAC.1970.1099422 URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1099422>
- [16] Yuanxi Y., Weiguang G. An optimal adaptive Kalman filter. *J. Geodesy*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 177–183. DOI: 10.1007/s00190-006-0041-0 URL: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00190-006-0041-0>

**Lysukho G.V.** — Student, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Maslennikov A.L.** — Teaching Assistant, Department of Automated Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Zadorozhnaya N.M., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Automated Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.