УДК 533.6.013 DOI: 10.18698/2541-8009-2019-05-483

МЕТОД ГРАММЕЛЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

И.С. Купоросова

irena_kup@mail.ru
SPIN-код: 1705-6304

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача о поперечных изгибных колебаниях прямолинейной упругой балки. Изгиб балки прямой, колебания системы малые. В реальности данную систему можно рассматривать как некоторую мачту или заводскую прямолинейную трубу. В теории уравнений математической физики существует понятие двойственности. В данной статье изложен подход, основанный на методе Граммеля. Показано, что если в качестве предварительных удовлетворяются геометрические граничные условия (метод Бубнова — Галёркина), то силовые условия будут естественными и наоборот, как в этом случае, а именно в методе Граммеля.

Ключевые слова

Метод Граммеля, поперечные изгибные колебания, идеально упругая вертикальная консоль, параметрические колебания, принцип Гамильтона, параметрический резонанс, уравнение Матье, неустойчивость колебательной системы

Поступила в редакцию 25.04.2019

Рассмотрим изгибные колебания идеально упругой вертикальной консоли (рис. 1), опора которой совершает малые вертикальные колебания согласно уравнению

$$u(\mathrm{t}) = u_0 \sin\beta t.$$

Масса балки m, плотность ρ равномерно распределена по ее длине l с погонной массой $\mu_0 = m/l$.

Уравнение колебаний поперечной консоли запишем в виде [1]

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\omega}{EJ_0} y(x,t) = 0,$$

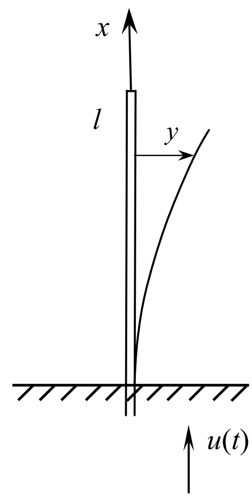

Рис. 1. Механическая система

где $\lambda^2 = \dfrac{\mu_0\omega}{EJ_0}$; M — изгибающий момент; EJ_0 — изгибная жесткость; $y(x, t)$ — прогиб балки; ω — частота колебаний системы.

Согласно принципу Гамильтона [2] имеем:

$$\delta \int_0^\tau (T - \Pi) dt = 0.$$

Действие по Гамильтону $\int_t (T-\Pi)dt = H$ [3]. Здесь τ — период колебаний системы; T — кинетическая энергия балки,

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l \mu_0 \dot{y}^2 dxdt, \text{ где } \dot{y} = \frac{dy}{dt};$$

П — потенциальная энергия системы,

$$\Pi_г = \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l \frac{M^2}{EJ_0} dxdt. \quad (1)$$

Отметим, что в данном случае силы тяжести не учитываются (случай неустойчивости прямолинейной формы равновесия оси балки — случай Эйлера) [4].

Поскольку $y(x,t) = f(x)\cos\omega t$, из (2) находим:

$$H = \int_0^\tau (\hat{T}\omega^2 \sin^2 \omega t\, \hat{\Pi}_г \omega^4 \cos^2 \omega t)dt. \quad (2)$$

Здесь $\hat{T}$ и $\hat{\Pi}_г$ — амплитудные значения кинетической и потенциальной энергий системы.

Выполнив интегрирование в (2), получим:

$$H = \frac{\pi}{\omega}(\hat{T}\omega^2 - \omega^4 \hat{\Pi}_г).$$

Так как $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\tau}{2}$ (τ — период колебаний системы), $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Зададим $f(x)$ в виде

$$f(x) = a\Psi(x).$$

Потенциальную энергию вычисляем не по формуле $\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left[f''(x)\right]^2 EJ_0 dx$ (это имеет место в методе Рэлея [5]), а по формуле (1). Эта формула предпочтительнее, поскольку мы не дифференцируем $f(x)$, а интегрируем, вычисляя $M(x)$:

$$M(x) = \int_0^l \lambda_1^2 f(x)dx.$$

Здесь $\lambda_1^2 = \frac{\mu_0}{EJ_0}$.

При одной и той же функции $f(x)$ результаты получаются точнее по отношению к частоте первого тона изгибных колебаний [6].

Зададим $f(x)$ в виде $f(x) = ax^2$, где a — неизвестный переменный параметр, аналог обобщенной координаты. Вычислим

$$M(x) = \lambda_1^2 a \int_0^x \int_0^x x^2 dx dx.$$

Получим:

$$M(x) = \lambda_1^2 a \left[\frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \right]. \qquad (3)$$

Граничные условия для консоли имеют следующий вид:

$$y(x = 0) = 0;\ y''(x = l) = 0;\ y'(x = 0) = 0;\ y'''(x = l) = 0. \qquad (4)$$

Здесь $y' = dy/dx$.

Удовлетворяя условиям (4) с помощью (3), запишем:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\omega^2 \mu_0}{EJ_0} y(x,t). \qquad (5)$$

Интегрируя (5), получим:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\omega^2 \mu_0}{EJ_0} \left[\frac{ax^3}{3} + c_1 \right].$$

Поскольку $\frac{\partial M}{\partial x} = Q(x,t)$ и граничные условия $Q(x,t) = 0$, то $\frac{ax^3}{3} + c_1 = 0;$ $c_1 = \frac{-ax^3}{3}$. Тогда

$$M(x,t) = \frac{\omega^2 \mu_0}{EJ_0} \left[\frac{ax^4}{12} + c_1 x + c_2 \right].$$

Поскольку на свободном конце балки при $x = l$ $M(\mathrm{l},t) = 0$, можно записать $\frac{ax^4}{12} + c_1 x + c_2 = 0$ и $c_2 = -\left(\frac{al^4}{12} + c_1 l \right)$.

Так как согласно принципу Гамильтона $\delta H = 0$,

$$\delta H = 2a\delta a \int_t (\hat{T}\omega^2 - \hat{\Pi}_\text{г}\omega^4) dt = 0.$$

Поскольку $a \neq 0$, $\delta a \neq 0$, $\omega^2 = \hat{\Pi}_\text{г}/T$. Здесь $\hat{\Pi}_\text{г}$ — амплитудное значение потенциальной энергии по Граммелю.

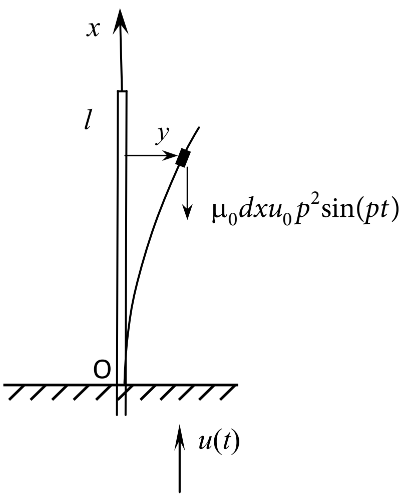

Рис. 2. Схема нагружения балки

Рассмотрим параметрические колебания системы, учитывая только первый тон собственных колебаний (рис. 2) [7]. Пусть прогиб $y(x, t) = f(x)s(t)$.

Интенсивность пары переносных сил инерции от вертикальных колебаний системы [8]:

$$\mathfrak{M}(\xi, t) = \mu_0 d\xi u_0 p^2 \sin pt\, f(x)s(t).$$

Дифференциальное уравнение для функции $s(t)$ [9]:

$$m_1^0 \ddot{s} + c_1^0 s = Q_s.$$

Здесь Q_s — s-я обобщенная сила системы,

$$Q_s = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}(\xi, t) f'(x)\delta s dx}{\delta s} = A(u_0) p^2 \sin pts(t),$$

где $A(u_0) = u_0 \int_0^l \mu_0 f(x) f'(x) dx.$

С учетом Q_s

$$m_1^0 \ddot{s} + c_1^0 \left(1 - \frac{A(u_0) p^2 \sin pt}{c_1^0}\right) s = 0$$

или

$$\ddot{s} + \omega_1^2 (1 - \varepsilon \sin pt) s = 0,$$

где $\varepsilon = \dfrac{A(u_0) p^2}{c_1^0}.$

Это уравнение — уравнение Матье [10] параметрических колебаний системы. Основной параметрический резонанс будет при $p = 2\omega_1$ (рис. 3).

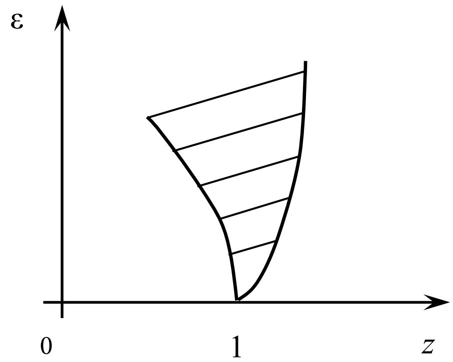

Рис. 3. Область неустойчивости колебательной системы от коэффициентов ε и z:

$z = \dfrac{p}{2\omega}$ — коэффициент пульсации, ε — коэффициент модуляции; заштрихованная область — область параметрического резонанса

Заключение. В статье приведено описание метода Граммеля, который дает более быструю сходимость для первого тона колебаний по сравнению с другими приближенными методами Ритца и Рэлея. Показана возможность существования параметрического резонанса в сооружениях, имеющих большие параметры гибкости стержней (отношение длины к диаметру).

Литература

[1] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М., Наука, 1967.
[2] Колесников К.С., ред. Курс теоретической механики. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
[3] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М., Физматлит, 1959.
[4] Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М., Высшая школа, 1972.
[5] Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. СПб., Лань, 2005.
[6] Бутенин Н.В. Теория колебаний. М., Высшая школа, 1963.
[7] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
[8] Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 2. М., Наука, 1985.
[9] Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М., Физматлит, 1997.
[10] Ильин М.М., Пожалостин А.А., Тушева Г.М. Колебания линейной системы с одной степенью свободы. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

Купоросова Ирина Станиславовна — студентка кафедры «Экология и промышленная безопасность», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Пожалостин Алексей Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

GRAMMEL'S METHOD AND PARAMETRIC VIBRATIONS

I.S. Kuporosova
irena_kup@mail.ru
SPIN-code: 1705-6304

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

This article reviews the problem of transverse bending vibrations of a rectilinear elastic beam. The bending of the beam is straight, the system vibrations are small. In reality, this system can be considered as a mast or factory straight pipe. In the theory of equations of mathematical physics, there is the concept of duality. This article outlines an approach based on the Grammel's method. It is shown that if geometric boundary conditions are satisfied as preliminary conditions (the Bubnov — Galerkin's method), then the force conditions will be natural and vice versa, as in this case, and especially in the Grammel's method.

Keywords

Grammel's method, transverse bending vibrations, ideally elastic vertical cantilever, parametric vibrations, Hamilton principle, parametric resonance, Mathieu equation, instability of oscillatory system

Received 25.04.2019

References

[1] Feodos'yev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1967 (in Russ.).

[2] Kolesnikov K.S., ed. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course of theoretical mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2017 (in Russ.).

[3] Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. Vibration problems in engineering. Wiley, 1974. (Russ. ed.: Kolebaniya v inzhenernom dele. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959.)

[4] Biderman V.L. Prikladnaya teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Applied theory of mechanical oscillations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1972. (in Russ.).

[5] Strelkov S.P. Vvedenie v teoriyu kolebaniy [Introduction into oscillation theory]. Sankt-Petersburg, Lan' Publ., 2005 (in Russ.).

[6] Butenin N.V. Teoriya kolebaniy [Oscillation theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1963 (in Russ.).

[7] Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. Teoriya kolebaniy [Oscillation theory]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2003 (in Russ.).

[8] Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T. 2 [Course of theoretical mechanics. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1985 (in Russ.).

[9] Zhuravlev V.F. Osnovy teoreticheskoy mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1997 (in Russ.).

[10] Il'in M.M., Pozhalostin A.A., Tusheva G.M. Kolebaniya lineynoy sistemy s odnoy stepen'yu svobody [Oscillations of linear system with one degree of freedom]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2002 (in Russ.).

Kuporosova I.S. — Student, Department of Ecology and Industrial Safety, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Pozhalostin A.A., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.