

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЗОНДИРОВАНИЯ ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Т.Л. Иванова

К.М. Зубарев

tahyksa@mail.ru

zubarev.bmstu@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложена математическая модель вертикально-слоистой среды. Рассмотрены двухслойные и трехслойные среды с различными параметрами. Для решения прямой задачи разработан универсальный алгоритм, позволяющий определять характеристики среды с различным числом слоев и при различных значениях удельного сопротивления и толщины слоя. Для решения обратной задачи использован метод Хука—Дживса и метод полного перебора. Реализованные алгоритмы протестированы на различных моделях среды. Определены преимущества и недостатки использованных алгоритмов, особенности вертикально-слоистой среды, выявлен наиболее эффективный метод решения обратной задачи. Разработанный программный комплекс может служить для решения прямых и обратных задач вертикального электрического зондирования

### Ключевые слова

Электроразведка, вертикальное электрическое зондирование, вертикально-слоистая среда, питающий электрод, удельное электрическое сопротивление, функция потенциала среды, прямая задача, обратная задача

Поступила в редакцию 17.10.2016

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

---

**Введение.** Электроразведка — один из основных методов в общем комплексе геофизических методов разведки. Она основана на изучении особенностей распространения постоянных и переменных электромагнитных полей в земной коре и определении по измеренным полям электромагнитных параметров среды [1, 2].

Сущность метода заключается в измерении потенциала, градиента потенциала, напряженности электрического и магнитных полей, на поверхности земли, а также в скважинах, шахтах и рудниках для решения геологических задач [3]. Проникающим вглубь среды инструментом служит электромагнитное поле. Таким образом в разведочной геофизике получают информацию о последовательности залегания пластов, элементах тектоники, наличии нефти, газа, руд, подземных вод, их количестве и качестве [4].

Основная цель исследования — прогнозирование внутренней структуры и вещественного состава геологического разреза по результатам обработки физических измерений. Применение геофизических методов, в частности электроразведки, позволяет не только упростить и ускорить поиски полезных ископае-

мых, но и сохранить во время поиска земные недра в первозданном состоянии [5]. Это важнейший аспект рассматриваемой дисциплины.

Основными методами электроразведки постоянным электрическим полем является вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ), дипольное электрическое зондирование (ДЭЗ), электрическое профилирование (ЭП) и др.[6, 7]. В основе теории этих методов лежат схожие задачи о постоянном электрическом поле, создаваемом искусственными источниками в некоторых фундаментальных моделях геоэлектрических резервов.

**Математическая постановка прямой задачи.** Дана модель вертикально-слоистой среды с числом слоев  $n$  и удельным сопротивлением  $\rho_1 - \rho_n$ . Расстояние от точки  $A$  до границ раздела обозначим соответственно через  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Требуется найти потенциалы  $U_1 - U_n$ . Для упрощения задачи отобразим все нижнее полупространство вверх. После этого получим полное пространство, разделенное на  $n$  пластов плоскими границами (рис. 1).

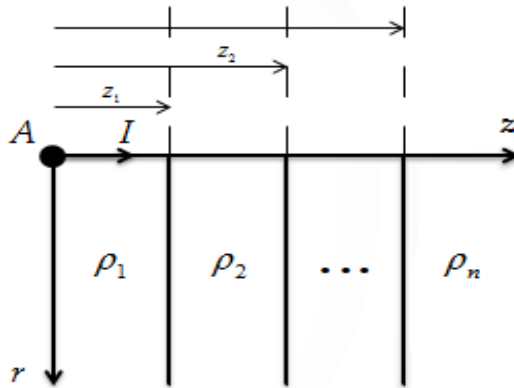


Рис. 1. Модель  $n$ -слойной среды с вертикальными пластами

Потенциал в первой среде представим в виде двух слагаемых: потенциала  $U_0$  точечного источника в окрестности питающего электрода и дополнительно потенциала  $U'_1$ , определяющего искажающее влияние границ раздела [8]:

$$U_1(r, z) = U_0(r, z) + U'_1(r, z); \quad (1)$$

$$U_0(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \dots, \quad (2)$$

где  $\rho_1, c_1$  — электрическое удельное сопротивление и теплоемкость первой среды, соответственно.

Потенциальные функции всюду конечны и удовлетворяют уравнению Лапласа, в бесконечно удаленных точках они обращаются в нуль [9]. В силу осе-

вой симметрии потенциалы не зависят от азимутного угла  $\varphi(dU/d\varphi=0)$ , и уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Полагая, что поверхности раздела не поляризуются и на них не возникают контактные ЭДС, граничные условия при  $z = z_i$  запишем в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} U_i &= U_{i+1} \\ \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial U_i}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial z} \end{aligned} \right\} i=1, 2, \dots, n-1.$$

**Преобразование уравнения Лапласа для нахождения функции потенциала.** Для решения уравнения (3) используем метод разделения переменных [10]  $U(r, z) = V(r)W(z)$ , введем это выражение в уравнение Лапласа и получим:

$$\begin{aligned} W \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + V \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Примем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r} &= -m^2, \\ \frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= m^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $m$  — переменная интегрирования, имеющая смысл пространственной частоты. Тогда решения уравнений (5) примут вид

$$\begin{aligned} V(mr) &= AJ_0(mr) + BN_0(mr), \\ W(mz) &= Ce^{-mz} + De^{mz}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $A, B$  — постоянные коэффициенты. При этом функция Неймана имеет особенность (рис. 2) при  $r = 0$  (на оси  $z$ , где  $N_0(mr) \rightarrow \infty$ ) [11, 12].

В связи с этим, согласно второму условию задачи, она не должна входить в искомое решение. Полагаем,  $B = 0$ ;  $C$  и  $D$  — независимые коэффициенты. Частным интегралом уравнения Лапласа является произведение частных решений:

$$U(mr, mz) = V(mr)W(mz) = (ae^{-mz} + be^{mz})J_0(mr), \quad (7)$$

где  $a = AC, b = AD$  — новые коэффициенты.

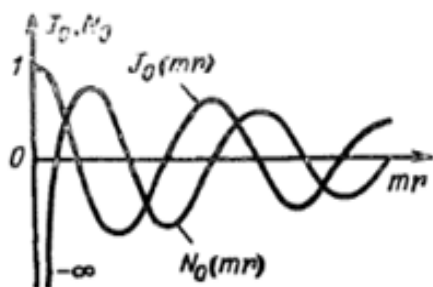


Рис. 2. Графики функции Бесселя от действительного аргумента

Поскольку величина  $m$  изменяется от нуля до бесконечности, то общее решение уравнения Лапласа для каждого слоя запишем в виде суммы частных решений или интеграла по всем  $m$  [13]:

$$U_i(r, z) = \int_0^{\infty} (a_i e^{-mz} + b_i e^{mz}) J_0(mr) dm, \quad (8)$$

где  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $a_1 = c_1, b_{i+1} = 0$ .

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} = \int_0^{\infty} (a_i m e^{-mz} + b_i m e^{mz}) J_0(mr) dm. \quad (9)$$

Остальные коэффициенты можно найти с помощью граничных условий, предусматривающих равенство потенциалов и нормальных составляющих плотности тока на границах раздела [14]. Эти условия выполняются для всех  $r$ , поэтому равенство интегралов типа (8) и (9) можно заменить равенством их подынтегральных выражений:

$$\left. \begin{aligned} a_i e^{-mz_i} + b_i e^{mz_i} &= a_{i+1} e^{-mz_i} + b_{i+1} e^{mz_i} \\ a_i e^{-mz_i} - b_i e^{mz_i} &= \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} (a_{i+1} e^{-mz_i} - b_{i+1} e^{mz_i}) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (10)$$

Решив уравнения (10), можно определить соответствующие коэффициенты  $a_i, b_i$  и найти выражения для потенциалов и кажущихся сопротивлений во всех пластах.

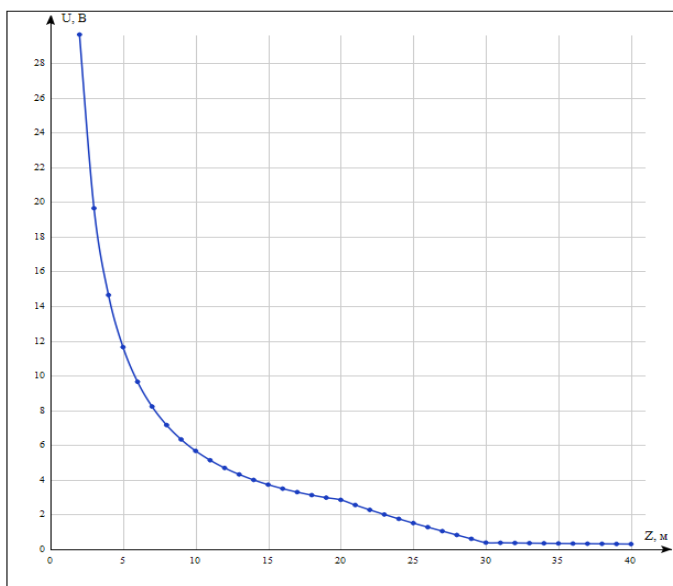
**Результаты решения прямой задачи. Графики потенциалов для различных сред.** На рис. 3, а представлен график потенциала трехслойной среды со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 30 \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad z_1 = 20 \text{ м}; \\ \rho_2 &= 100 \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad z_2 = 30 \text{ м}; \\ \rho_3 &= 5 \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad z_3 \rightarrow \infty; \\ I &= 2 \text{ Ам}. \end{aligned}$$

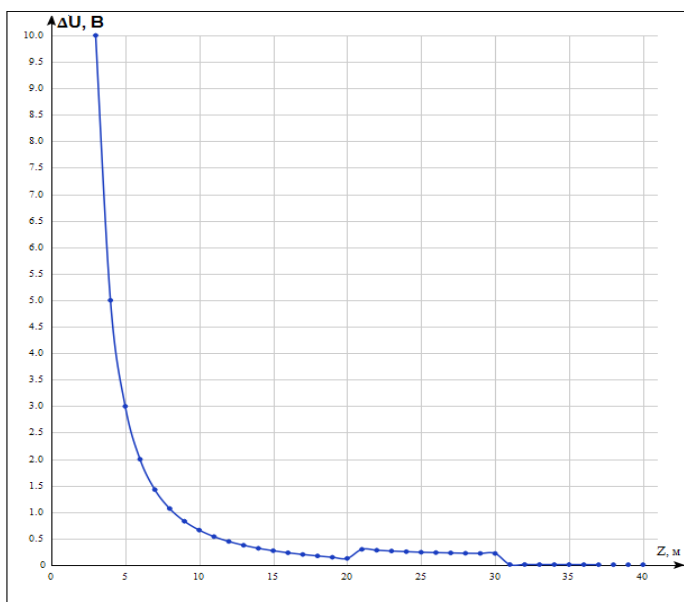
График разности значений потенциалов, измеренных в текущей точке и предыдущей точке, приведен на рис. 3, б.

Анализируя данные, полученные при решении прямой задачи можно сделать следующие выводы:

- в среде с большим удельным электрическим сопротивлением (УЭС) значение потенциала падает быстрее;
- при переходе к слою с более низким УЭС наблюдается резкое снижение функции разности потенциалов;
- при переходе к среде с более высоким УЭС, наблюдается резкое повышение функции разности потенциалов.



а



б

Рис. 3. Потенциал трехслойной среды (а)  
и разности значений потенциалов среды (б)

**Математическая постановка обратной задачи.** Потенциал поля точечного источника в среде с вертикальными пластами является функцией многих переменных [15], часть из которых — фиксированные величины тока и числа слоев. Другая часть — варьируемые переменные толщины слоев, УЭС [13]. Обратная задача ставится следующим образом: для заданного числа пла-

стов требуется найти такие значения их толщины УЭС, чтобы для заданного набора точек измерения потенциала на границе полупространства сумма квадратов отклонений теоретических значений потенциалов от измеряемых была минимальной [14].

$$F(\rho_1, \dots, \rho_n, h_1, \dots, h_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{U}(M_i) - U(M_i, \rho_1, \dots, \rho_n, h_1, \dots, h_n))^2} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Поставленная задача является задачей оптимизации и решается при условии, что для варьируемых величин заданы границы их изменений.

**Оптимальный алгоритм решения обратной задачи.** Для решения обратной задачи в данной работе были использованы метод полного перебора и метод Хука—Дживса.

Метод полного перебора является универсальным и наиболее простым. Сущность метода состоит в выдвигании ряда моделей  $x$  и в сопоставлении их откликов  $f$  с экспериментальными данными  $u$ . Принимаются те модели (или модель), отклик которых достаточно хорошо соответствует  $u$  [15]. Обычно используют критерий минимума нормы расхождения модельных и экспериментальных данных [16]. Несмотря на недостатки, метод полного перебора является одним из самых точных методов для решения обратных задач.

Метод Хука—Дживса относят к категории эвристических методов (методам прямого поиска) [17, 18]. Такие методы используют не менее  $n$  независимых направлений, где  $n$  — размерность вектора [19–21]. Элементарным примером метода, реализующего процедуру рекурсивного перебора на множестве направлений поиска, является метод циклического изменения переменных: каждый раз меняется только одна переменная. Затем вдоль каждого из координатных направлений последовательно проводится поиск точки экстремума на основе методов одномерной минимизации [22–26]. Однако, если линии уровня целевой функции имеют овражный характер, то процедура поиска становится неэффективной и даже может привести к отсутствию сходимости к точке локального *extr*.

Ниже приведен алгоритм метода Хука—Дживса [27, 28], использованный в данной работе.

1. Определить начальную модель  $x^0$ , приращения (шаги)  $d^i$  коэффициент уменьшения шага  $\alpha > 1$ , параметр окончания поиска  $\varepsilon$ .
2. Провести исследующий поиск.
3. Определить, был ли исследующий поиск успешным: найдена ли точка с меньшим значением целевой функции. «Да» — переход к шагу 5. «Нет» — переход к шагу 4.
4. Произвести проверку на окончание поиска. «Да» — окончание поиска, текущая модель является оптимальной. «Нет» — уменьшить приращение  $d^i = d^i / \alpha$ , затем перейти к шагу 2.
5. Провести поиск по образцу  $x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1})$ .

6. Провести исследующий поиск, используя модель  $x_p^{k+1}$  в качестве базовой.

Пусть в результате получена модель  $x^{k+1}$ .

7. Установить выполняется ли неравенство  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ , где  $x^{k-1} = x^k$ ;  $x^k = x^{k+1}$ . «Да» — перейти к шагу 8. «Нет» — вернуться к шагу 4.

8. Провести проверку на окончание поиска. «Да» — текущая точка является оптимальной моделью. «Нет» — переход к шагу 5.

**Результаты решения обратной задачи. Сравнение разработанных алгоритмов.** В качестве экспериментальных данных для решения обратной задачи возьмем значения потенциалов, полученных при решении прямой задачи для трехслойной модели. После анализа кривой выбраны следующие начальные приближения, а также нижние и верхние границы:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_1 = 15, \quad \underline{\rho}_2 = 60, \quad \underline{\rho}_3 = 1; & \quad \rho_1^0 = 15 \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad z_1^0 = 18; \\ \overline{\rho}_1 = 60, \quad \overline{\rho}_2 = 140, \quad \overline{\rho}_3 = 20; & \quad \rho_2^0 = 70 \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad z_2^0 = 31; \\ \underline{z}_1 = 15, \quad \underline{z}_2 = 25; & \quad \rho_3^0 = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}, \quad z_3 \rightarrow \infty. \\ \overline{z}_1 = 25, \quad \overline{z}_2 = 35; & \end{aligned}$$

На рис. 4 представлены несколько итераций метода Хука—Дживса. Синим цветом обозначена кривая, полученная при решении прямой задачи, а зеленым — экспериментальная кривая, полученная в результате решения обратной задачи на 281-й итерации.

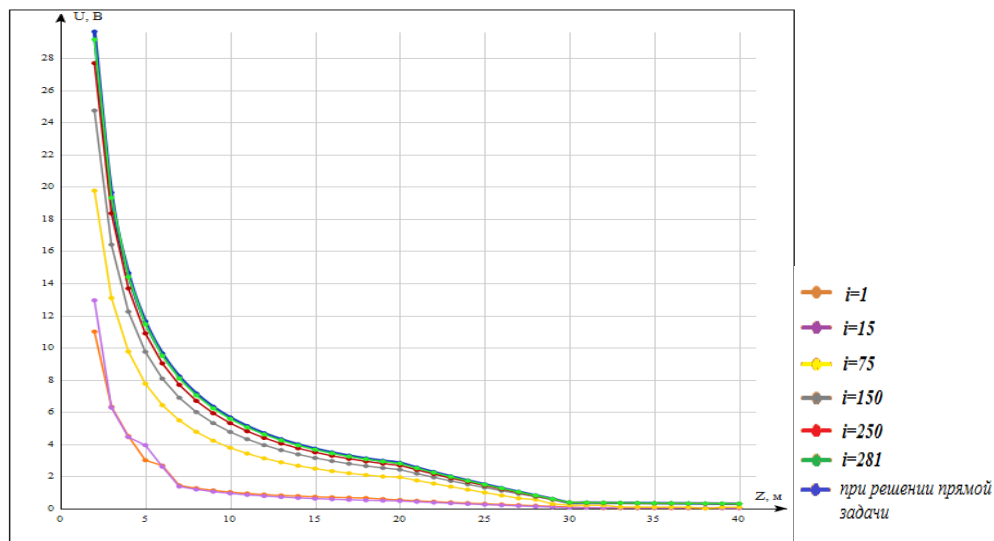


Рис. 4. Результаты на каждой итерации, полученные методом Хука—Дживса

Из рисунка видно, что метод показал хорошую сходимость. При дальнейшем исследовании установлено, что метод Хука—Дживса работает не при

всех начальных приближениях, поскольку функция потенциала является овражной.

При решении задачи методом полного перебора получена функция потенциала, совпадающая с экспериментальной. Таким образом, полученные значения параметров среды равны заданным при решении прямой задачи.

По результатам тестирования методов можно выделить преимущества и недостатки каждого из алгоритмов (табл.).

### Сравнение описанных методов

Название метода	Преимущества	Недостатки
Метод Хука—Дживса	Работает в восемь раз быстрее метода полного перебора. Не зависит от интервала между нижней и верхней границами значения параметров	Плохая сходимость. Работает не при всех начальных приближениях
Метод полного перебора	Хорошая сходимость. Высокая точность полученных результатов. Погрешность $\varepsilon < 0,0001$	Требует большого количества времени на выполнение (около 20 мин). Увеличение интервала между границами приводит к многократному увеличению времени выполнения

В целом метод полного перебора является оптимальным для решения обратных задач, так как позволяет найти значения параметров среды с высокой точностью и за меньшее время. Реализованный в работе метод Хука—Дживса показал плохую сходимость, поэтому использовать его для решения данного класса задач не рекомендуется.

**Выводы.** Созданный исследовательский пакет программ позволяет решать прямые и обратные задачи ВЭЗ.

В ходе решения обратной задачи реализованы методы Хука—Дживса и полного перебора, позволяющие с высокой точностью решать обратную задачу ВЭЗ. На большом числе экспериментов изучены свойства алгоритмов. Не зависимо от начальных данных параметры среды оцениваются с большой точностью. Однако для решения обратных задач использование метода Хука—Дживса не целесообразно.

Разработанные алгоритмы, программа и технические приемы могут быть использованы для исследовательских работ на различных моделях, опытной обработки производственных данных, а также для создания пакета программ и технологий решения обратных задач ВЭЗ и применения в производственном режиме.

### Литература

1. Краев А.П. Основы геоэлектрики. 2-е изд., Л.: Недра, 1965. 588 с.
2. Заборовский А.И. Электроразведка. М.: Гостоптехиздат, 1963. 429 с.



3. Ковтун А.А. Использование естественного электромагнитного поля при изучении электропроводности Земли. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 196 с.
4. Альпин Л.М., Даев Д.С., Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М.: Недра, 1985. 407 с.
5. Гольцман Ф.М. Проблемные вопросы информационно-статистической теории интерпретации геофизических наблюдений // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1975. № 1. С. 19–53.
6. Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г., Крылов В.А. Методы моделирования электромагнитных полей // Материалы междунар. Проекта СОМЕМ. М.: Наука, 1990. 198 с.
7. Якубовский Ю.В., Ляхов Л.Л. Электроразведка. 2-е изд., М.: Недра, 1980. 384 с.
8. Апельцин В.Ф., Мозжорина Т.Ю. Свойства одномерного фотонного кристалла как отражающей или волноведущей структуры в случае Н-поляризованного возбуждения // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 2 (2). С. 3–27. URL: <http://mmcm.bmstu.ru/articles/11/> DOI: 10.18698/2309-3684-2014-2-327
9. Аузин А.К. Электроразведка (Спецкурс по индуктивным и радиоволновым методам рудной электроразведки). М.: Недра, 1977. 134 с.
10. Блох И.М. Электропрофилирование методом сопротивлений. 2-е изд., М.: Недра, 1971. 216 с.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
12. Грэй Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Иностранная литература, 1953. 372 с.
13. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. М.: Недра, 1986. 340 с.
14. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.
15. Жданов М.С. Электроразведка. М.: Недра, 1986. 316 с.
16. Вешев А.В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. 2-е изд. Л.: Недра, 1980. 391 с.
17. Гольцман Ф.М. Статистические методы интерпретации. М.: Наука, 1971. 327 с.
18. Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2013. № 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/964.html> DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964
19. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4-х т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 560 с.
20. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Маркевич М.Н., Сборщиков С.В. Математическое моделирование диэлектрических свойств наноструктурированных композиционных материалов методом асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 76–89. URL: <http://vestniken.ru/catalog/it/sysan/675.html> DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-76-89
21. Разработка вычислительной технологии решения геометрически-обратных задач тепловой диагностики трехслойных сварных конструкций / Ю.И. Димитриенко, И.К. Краснов, Г.Ф. Реш, Д. Акинкин, И. Кузнецов // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2012. № 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/37.html> DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-37
22. Колесников В.П. Обработка и интерпретация результатов вертикального электрического зондирования с помощью ЭВМ. М.: Недра, 1981. 141 с.

23. Куфуд О. Зондирование методом сопротивлений. Пер. с англ. М.: Недра, 1984. 270 с.
24. Матвеев Б.К. Электроразведка. М.: Недра, 1990. 368 с.
25. Хмелевский В.К. Основной курс электроразведки. В 3-х ч. Ч. 1. Электроразведка постоянным током. М.: Изд-во МГУ, 1970. 245 с.
26. Хмелевский В.К. Основной курс электроразведки. В 3-х ч. Ч. 2. Электроразведка переменным током. М.: Изд-во МГУ, 1971. 272 с.
27. Хмелевский В.К. Основной курс электроразведки. В 3-х ч. Ч. 3. Электроразведка в комплексе геолого-геофизических исследований. М.: Изд-во МГУ, 1975. 206 с.
28. Шейнман С.М. Современные физические основы теории электроразведки. Л.: Недра, 1969. 242 с.

**Иванова Татьяна Леонидовна** — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Зубарев Кирилл Михайлович** — магистрант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — И.К. Краснов, канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

## MULTILAYER MEDIA ELECTROPHYSICAL PARAMETERS RECOVERY ON COMPLETION DIRECT CURRENT SOUNDING

T.L. Ivanova  
K.M. Zubarev

tahyksa@mail.ru  
zubarev.bmstu@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

### Abstract

The paper deals with a mathematical model of a vertically-layered medium. We consider two-layer and three-layer media with different parameters. To solve the direct problem, we developed a universal algorithm which helps to determine the characteristics of the medium with a different number of layers and at different values of resistivity and layer thickness. To solve the inverse problem, we used Hooke-Jeeves method and the exhaustive method. We tested the implemented algorithms on various media models. The results obtained allowed us to determine the advantages and disadvantages of the algorithms used, identify the most effective method of solving the inverse problem, determine the characteristics of vertically-layered medium. The developed software package can be used for solving direct and inverse problems of vertical electrical sounding

### Keywords

Electrical exploration, vertical electric sounding, vertically-layered medium, source electrode, electrical resistivity, medium potential function, direct problem, inverse problem

© Bauman Moscow State Technical University, 2016

### References

- [1] Kraev A.P. Osnovy geoelektriki [Fundamentals of geo-electrical engineering]. Leningrad, Nedra Publ., 1965. 588 p. (in Russ.).
- [2] Zaborovskiy A.I. Elektrorazvedka [Electric prospecting]. Moscow, Gostoptekhizdat Publ., 1963. 429 p. (in Russ.).
- [3] Kovtun A.A. Ispol'zovanie estestvennogo elektromagnitnogo polya pri izuchenii elektroprovodnosti Zemli [Using natural electromagnetic field in studies of Earth conductivity]. Leningrad, LGU Publ., 1980. 196 p. (in Russ.).
- [4] Al'pin L.M., Daev D.S., Karinskiy A.D. Teoriya poley, primenyaemykh v razvedochnoy geofizike [Field theory used in exploratory geophysics]. Moscow, Nedra Publ., 1985. 407 p. (in Russ.).
- [5] Gol'tsman F.M. Topical issues of information statistical interpretation theory of geophysical exploration. *Izvestiya AN SSSR. Ser. Fizika Zemli*, 1975, no. 1, pp. 19–53 (in Russ.).
- [6] Zhdanov M.S., Varentsov I.M., Golubev N.G., Krylov V.A. [Methods for magnetic field simulation]. *Materialy mezhd. proekta COMEMI* [Proc. of COMEMI Int. Project]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 199 p. (in Russ.).
- [7] Yakubovskiy Yu.V., Lyakhov L.L. Elektrorazvedka [Electric prospecting]. Moscow, Nedra Publ., 1980. 365 p. (in Russ.).
- [8] Apel'tsin V.F., Mozhzhorina T.Yu. Properties of one-dimensional photonic crystal as a reflective or wave guiding structure when excited by H-polarization. *Matematicheskoe*

*modelirovanie i chislennyye metody*, 2014, no. 2 (2), pp. 3–27.

URL: <http://mmcm.bmstu.ru/articles/11/> (in Russ.). DOI: 10.18698/2309-3684-2014-2-327

- [9] Auzin A.K. *Elektrozvedka (spetskurs po induktivnym i radiovolnovym metodam rudnoy elektrozvedki)* [Electric prospecting (specialized course on inductive and radio-frequency methods of mine electric prospecting)]. Moscow, Nedra Publ., 1977. 134 p. (in Russ.).
- [10] Blokh I.M. *Elektroprofilirovanie metodom soprotivleniy* [Resistivity electric profiling]. Moscow, Nedra Publ., 1971. 216 p. (in Russ.).
- [11] Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics equations]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p. (in Russ.).
- [12] Gray A., Mathews G.B. *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*. London and New York, Macmillan and Co., 1895. 316 p. (Russ. ed.: *Funktsii Besselya i ikh prilozheniya k fizike i mekhanike*. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1953. 372 p.)
- [13] Nikitin A.A. *Teoreticheskie osnovy obrabotki geofizicheskoy informatsii* [Theoretical foundations of geophysical data processing]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 342 p. (in Russ.).
- [14] Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics equations]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 336 p. (in Russ.).
- [15] Zhdanov M.S. *Elektrozvedka* [Electric prospecting]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 316 p. (in Russ.).
- [16] Veshev A.V. *Elektroprofilirovanie na postoyannom i peremennom toke* [Double current electric profiling]. Leningrad, Nedra Publ., 1980. 391 p. (in Russ.).
- [17] Gol'tsman F.M. *Statisticheskie metody interpretatsii* [Statistical interpretation methods]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 328 p. (in Russ.).
- [18] Gribov A.F., Zhidkov E.N., Krasnov I.K. A numerical solution of inverse problem of head transfer. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/964.html> (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-964
- [19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. T. 2: Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics. Vol. 2. Universal continuum mechanics and electrodynamics laws]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 560 p. (in Russ.).
- [20] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Markevich M.N., Sborshchikov S.V. Mathematical modelling of dielectric properties of nanostructural composites using asymptotic homogenizing method. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 1, pp. 76–89. URL: <http://vestniken.ru/catalog/it/sysan/675.html> (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-76-89
- [21] Dimitrienko Yu.I., Krasnov I.K., Resh G.F., Akinkin D., Kuznetsov I. Development of computing technology for solving the geometrically inverse problems of thermal diagnostics of three-layer welded constructions. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2012, no. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/37.html> (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-37
- [22] Kolesnikov V.P. *Obrabotka i interpretatsiya rezul'tatov vertikal'nogo elektricheskogo zondirovaniya s pomoshch'yu EVM* [Processing and interpretation of vertical electro-sounding measurement data using computer]. Moscow, Nedra Publ., 1981. 141 p. (in Russ.).
- [23] Koefoed O. *Geosounding principles*. Amsterdam, Elsevier Publishing Co., 1979. (Russ. ed.: *Zondirovanie metodom soprotivleniy*. Moscow, Nedra Publ., 1984. 270 p.)

- [24] Matveev B.K. Elektrozvedka [Electromagnetics]. Moscow, Nedra Publ., 1990. 368 p. (in Russ.).
- [25] Khmelevskiy V.K. Osnovnoy kurs elektrozvedki. Ch. 1. Elektrozvedka postoyannym tokom [Electric prospecting basic course. Vol. 1. DC electric prospecting]. Moscow, MGU Publ., 1970. 245 p. (in Russ.).
- [26] Khmelevskiy V.K. Osnovnoy kurs elektrozvedki. Ch. 2. Elektrozvedka peremennym tokom [Electric prospecting basic course. Vol. 2. AC electric prospecting]. Moscow, MGU Publ., 1971. 272 p. (in Russ.).
- [27] Khmelevskiy V.K. Osnovnoy kurs elektrozvedki. Ch. 3. Elektrozvedka v komplekse geologo-geofizicheskikh issledovaniy [Electric prospecting basic course. Vol. 3. Electric prospecting in conjunction with geology-physical surveys]. Moscow, MGU Publ., 1975. 206 p. (in Russ.).
- [28] Sheynmann S.M. Sovremennye fizicheskie osnovy teorii elektrozvedki [Modern physical principles of electric prospecting theory]. Leningrad, Nedra Publ., 1969. 242 p. (in Russ.).

**Ivanova T.L.** — Master's Degree student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University Moscow, Russian Federation.

**Zubarev K.M.** — Master's Degree student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — I.K. Krasnov, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.