

## ЗАДАЧА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ

Н.В.Кошляков

nikitakoshlakov@ya.ru

SPIN-код: 4047-3905

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Рассмотрена задача геометрического покрытия с наименьшей площадью перекрытий и промахов объектов, которая является частным случаем задачи оптимального проектирования и принадлежит к классу задач «раскроя и упаковки». Сложность рассматриваемых задач оптимального проектирования обусловлена их принадлежностью к классу NP-трудных задач, что не позволяет решать их точными методами и требует построения приближенных оптимизационных методов и алгоритмов. Эффективным является использование метаэвристических методов. В статье рассмотрены «первый подходящий», вероятностный, экстремальный, генетический и «муравьиный» алгоритмы, применение которых позволит повысить эффективность систем и уменьшить затраты на их проектирование и реализацию.

### Ключевые слова

Задача оптимизации геометрического покрытия, NP-трудная задача, метаэвристические алгоритмы

Поступила в редакцию 31.10.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

**Введение.** При решении задачи геометрического покрытия в различных прикладных отраслях часто используют этап раскроя или размещение деталей с учетом геометрических особенностей. Этот этап является важным с точки зрения экономии ресурсов и сложным для принятия оптимального решения. Подобные проблемы описываются математическими постановками оптимизационных задач геометрического размещения. Задача геометрического покрытия является частным случаем задачи оптимального проектирования и принадлежит к классу задач «раскроя и упаковки» [1, 2]. Требуется расположить некоторые геометрические объекты на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта целиком с наименьшей площадью перекрытий и промахов объектов. Актуальность данной задачи обусловлена также ее принадлежностью к классу NP-трудных задач, сложность которых очень быстро возрастает с увеличением размерности. Для решения задач малой размерности можно использовать точные алгоритмы. Однако для задач большей размерности точные методы требуют значительных временных затрат и не дают хороших результатов. Эффективным является использование метаэвристических методов [3].

**Постановка задачи геометрического покрытия.** Для определения задачи требуется ввести формализованные понятия и определения [4]. Любой геометрический объект обладает вполне определенной пространственной формой,

имеет заданные метрические характеристики и занимает некоторое положение в пространстве  $R^n$ . Указанные характеристики задают геометрическую информацию об объекте.

Представим геометрическую информацию в виде

$$g = (\{s\}, \{m\}, \{p\}),$$

где  $\{s\}$  — совокупность пространственных форм;  $\{m\}$  — метрические характеристики, определяющие размеры точечных множеств, имеющих формы из  $\{s\}$ ;  $\{p\}$  — параметры, задающие местоположение точечных множеств в соответствующих пространствах.

Пусть в двумерном пространстве имеется покрываемая поверхность  $S_0 = S_0(x_0, y_0, \theta_0)$  и покрывающие геометрические объекты  $S_1 = S_1(x_1, y_1, \theta_1)$ , ...,  $S_m = S_m(x_m, y_m, \theta_m)$  где  $m$  — общее число заданных объектов различной формы. Требуется расположить геометрические объекты на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта целиком, т. е. должно выполняться условие  $S_0 \cap \left( \bigcup_{i=1}^n S_i \right) = S_0$ , где  $n$  — общее количество использованных объектов (в общем случае  $n \neq m$  поскольку некоторые объекты могут быть не использованы совсем).

Ниже будут рассмотрено решение задач оптимального геометрического покрытия с помощью алгоритма «первый подходящий», вероятностного, экстремального, генетического и муравьиного алгоритмов [5, 6].

**Методы решения задачи геометрического покрытия с наименьшей площадью перекрытия.** *Генетический алгоритм* [7] — эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путем случайного подбора, комбинирования и вариации искомым параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Эффективность алгоритма сильно зависит от параметров (размер начальной популяции, тип селекции, уровень мутации, уровень элитизма и другие), подбираемых опытным путем.

Алгоритм подразделяют на три этапа:

- скрещивание;
- селекция (отбор);
- мутирование.

Если результат неудовлетворительный, то шаги повторяют до тех пор, пока результат не станет удовлетворительным или пока не будет выполнено одно из перечисленных ниже условий:

- количество поколений (циклов) достигнет заранее выбранного максимума;
- будет исчерпано время на мутацию.

В качестве примера применения генетического алгоритма можно рассмотреть процесс развития учеников в классе. Каждый ученик символизирует одно покрытие поверхности. Создается класс определенного количества. Все ученики

обладают начальными знаниями. «Создание» учеников происходит с помощью алгоритма «первый подходящий» с уникальной случайностью. При первичной оценке знаний выявляется лучше всех успевающий ученик с самым высоким коэффициентом успеха (Success). Далее происходит обучение и развитие учеников в классе. Определяется материал, который ученики плохо знают, т. е. объекты, которые имеют низкий локальный коэффициент, удаляются. Критерий оценки знаний, т. е. локальный коэффициент, является случайной величиной, значения которой находятся в пределах от самого низкого до самого высокого коэффициента. Удаление объектов с достаточно высоким локальным коэффициентом ведет не только к возможному ухудшению покрытия, но и к появлению новых веток развития, что может привести к улучшению результата. Затем происходит составление программы обучения учеников, т. е. повторная укладка объектов на пустые области «жадным» методом «муравьиного» алгоритма или с помощью вероятностного алгоритма, что определяется случайно. После изучения опять осуществляется проверка знаний. У некоторых учеников результаты улучшаются, у некоторых — ухудшаются. Если самый высокий результат в классе улучшается, то считается, что класс развивается в лучшую сторону, а если через определенное число проверок знаний самый высокий результат не улучшается, то считается, что класс не развивается, и обучение завершается.

«Муравьиный» алгоритм основан на поведении муравьиной колонии [8] — маркировка более удачных путей большим количеством феромона. Решение не является точным и даже может быть одним из худших, однако, в силу вероятности решения, при повторении алгоритма может быть получен достаточно точный результат.

Рассмотрим реализацию алгоритма на примере укладки объектов: «гордой» и «жадной». Сначала покрывающие объекты с одинаковой площадью объединяются в группы. Далее происходит сортировка получившихся групп по убыванию площади. При выполнении цикла каждой группе присваивается статус. Группа со статусом «жадной» укладки осуществляет размещение объектов на покрываемой поверхности оптимальным способом. Оптимальный способ укладки — это размещение объектов путем полного прохождения каждым объектом каждой точки карты и выбора лучшего положения данного объекта на карте. Лучшее размещение объекта выбирается из двух условий: «жадность» и «эксклюзив». «Жадность» определяется количеством единиц под объектом с данным поворотом и на данной точке карты, а «эксклюзив» определяется суммой единиц для четырех поворотов на данной точке карты. Лучшим положением является точка на карте с максимальной «жадностью». Если точек карты с максимальной «жадностью» несколько, то в качестве лучшего положением выбирается точка с минимальным «эксклюзивом». Если точек с максимальной «жадностью» и минимальным «эксклюзивом» несколько, точка для расположения объекта выбирается случайным образом из полученных лучших вариантов. Данным условием достигается случайность алгоритма.

Группа со статусом «гордой» укладки производит размещение объектов на покрываемой поверхности оптимальным способом с дополнительным условием. Ограничением для данного размещения является условие, при котором отношение «жадности» в данной точке карты с данным поворотом к площади покрывающего объекта равно единице. Объект в данном виде укладки может быть расположен на карте только при соблюдении этого условия. Так же, как и при «жадной» укладке, при получении нескольких точек с идеальной «жадностью» объект располагается в точке с минимальным «экслюзивом». Если точек с идеальной «жадностью» и минимальным «экслюзивом» несколько, точка для расположения объекта выбирается случайным образом из полученных лучших вариантов.

Изначально все группы отмечаются статусом «гордой» укладки, а последняя группа с меньшей площадью получает статус «жадной» укладки. Размещение объектов осуществляется начиная с последней группы с меньшей площадью. В алгоритме используется внешний цикл установки «жадной» укладки на группу, следующую в обратном направлении от конца списка групп. В цикле происходит распределение объектов групп со статусом «гордой» укладки и объектов последней группы со статусом «жадной» укладки. Затем осуществляется расчет коэффициента эффективности покрытия и запоминание результата. Далее в каждом цикле установки статуса «жадной» укладки происходит сброс всех объектов, расположенных методом «жадной» укладки, и объектов из последней уложенной группы со статусом «гордой» укладки. После удаления этих объектов статус «жадной» укладки устанавливается для следующей группы и осуществляется размещение объектов методом «жадной» укладки соответствующей группы с большей площадью с переходом к группе с меньшей площадью. Далее снова рассчитывается коэффициент эффективности и сравнивается с предыдущим результатом. Лучший вариант запоминается. После завершения цикла установки статуса «жадной» укладки в памяти остается лучший результат покрытия.

Алгоритм «первый подходящий» [9] (*first fit*) предполагает простую укладку первого попавшегося геометрического объекта на первую найденную пустую область на покрываемой поверхности. Покрытие происходит слева направо, сверху вниз. Этот алгоритм не гарантирует получения хорошего результата, но дает возможность построения хорошего начального приближения.

Вследствие работы вероятности и большого количества повторений алгоритм может давать хорошие результаты, которые могут быть даже лучше результатов работы более сложных алгоритмов. Несмотря на большое количество выполнений, алгоритм не требует больших вычислительных ресурсов, поскольку случайный объект размещается на место в порядке следования «бегунка», и время работы алгоритма сравнительно небольшое. Чем сложнее поверхность и более разнообразные покрывающие объекты, тем хуже работает «первый подходящий» алгоритм.

*Вероятностный алгоритм (метод Монте-Карло: выборка по значимости)* [10] — это алгоритм, предусматривающий обращение на определенных этапах своей работы к генератору случайных чисел с целью получения экономии во

времени работы за счет замены абсолютной достоверности результата достоверностью с некоторой вероятностью.

Каждому из  $S_m$  объектов присваивается вероятность использования в зависимости от площади объекта. Затем объекты упорядочиваются по уменьшению вероятности использования. Далее покрытие осуществляется некоторое количество раз по принципу алгоритма «первый подходящий», которое определяется применением доверительного коэффициента. Начальное значение доверительного коэффициента равно единице. Единственный управляемый коэффициент называют детализацией доверительности. Он показывает количество шагов одинаковой величины, за которые доверительный коэффициент уменьшается до нуля. В этом алгоритме происходит «примерка» объектов на каждое место. Если объект удовлетворяет доверительному коэффициенту, то он устанавливается на место, иначе коэффициент уменьшается.

*Экстремальный алгоритм* [10] работает только с одним решением, которое шаг за шагом улучшается. Основная стратегия метода заключается в том, чтобы найти те компоненты решения, которые влияют на него наихудшим образом, и постепенно улучшать их, используя простое покрытие.

Применительно к задаче покрытия данный алгоритм будет работать следующим образом. Есть покрываемая поверхность  $S_0$ . Для покрытия этой области применен алгоритм «первый подходящий». Поверхность покрытия разбивается на две части и вычисляются коэффициенты эффективности покрытия для этих частей. Принято, что объекты, попавшие на линию раздела, принадлежат части с меньшим коэффициентом. Все объекты, принадлежащие области поверхности с худшим коэффициентом, удаляются, и осуществляется повторное покрытие поверхности с учетом оставшихся объектов. После повторного покрытия происходит расчет коэффициента успеха (*Success*). Если коэффициент области нового покрытия меньше либо равен коэффициенту области с предыдущим покрытием, происходит возврат к старому варианту покрытия, иначе сохраняется новый результат. И так до тех пор, пока происходит улучшение при заданной глубине рекурсии (количество попыток). Данный алгоритм дает приемлемые результаты при небольшой глубине рекурсии и достаточно большом количестве выполнений.

**Выводы.** Рассмотрена задача геометрического покрытия с наименьшей площадью перекрытий, из класса NP-трудных задач, которую возможно решить одним из описанных выше методов. Однако метаэвристические алгоритмы не дают точный результат при решении.

Применение модифицированных алгоритмов может существенно упростить решения задач проектирования систем охранной сигнализации, воздушного и космического наблюдения, агротехнических систем полива. Модифицируя алгоритм, формируя различные группы объектов в зависимости от формы диаграммы направленности и стоимости оборудования, можно получать разные схемы покрытия. Использование алгоритмов для различных покрытий в проектировании нужна доработка, поскольку все особенности покрываемой поверх-

ности и объектов учесть нельзя. Графическая визуализация результатов даст наглядное представление о покрытии, а численное выражение параметров позволит оценить и сравнить результаты.

## Литература

- [1] Канторович Л.В., Залгаллер В.А. *Рациональный раскрой промышленных материалов*. 3-е изд., перераб. и доп. Новосибирск, Наука, 2012, 300 с.
- [2] Юдаков П.В. Задача о трехмерной упаковке и методы ее решения. *Инженерный вестник. Электрон. журн.*, 2015, № 2. URL: <http://engbul.bmstu.ru/doc/781936.html> (дата обращения 15.09.2017).
- [3] Фроловский В.Д., Забелин С.Л. Разработка и анализ приближенных методов решения оптимизационных задач геометрического покрытия. *Информационные технологии в проектировании и производстве*, 2012, № 3. URL: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_16897548\\_69207742.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_16897548_69207742.pdf) (дата обращения 16.08.2017).
- [4] Чуб И.А. Математическая модель оптимизационной задачи размещения пожароопасных объектов с учетом рельефа области размещения. *Математичне та компютерне моделювання*, 2013, с. 88–93.
- [5] Курейчик В.В., Глуценко А.Е., Орлов А.Н. Гибридный подход для решения задачи трехмерной упаковки. *Известия ЮФУ. Технические науки*, 2016, № 6 (156), с. 196–204.
- [6] Dorigo M. *Optimization, Learning and Natural Algorithms*, PhD thesis — Politecnico di Milano, Italie, 2012.
- [7] Забелин С.Л., Фроловский В.Д., Жеголко К.В. Разработка и исследование генетического алгоритма для автоматизации проектных процедур оптимизации геометрического покрытия. *Вестник ТГТУ*, 2015, Т. 21. № 2. URL: [http://vestnik.tstu.ru/rus/t\\_21/pdf/21\\_2\\_005.pdf](http://vestnik.tstu.ru/rus/t_21/pdf/21_2_005.pdf) (дата обращения 16.08.2017).
- [8] Сравнение алгоритма двумерных матриц и муравьиного алгоритма для задачи геометрического покрытия [Электронный ресурс]. URL: <http://lab18.ipu.ru/projects/conf2010/1/21.htm> (дата обращения 17.08.2017).
- [9] Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М., Сороколетов П.В. *Биоинспирированные методы в оптимизации*. Москва, Физматлит, 2012, 380 с.
- [10] Забелин С.Л., Фроловский В.Д. Исследование метаэвристических алгоритмов для задач оптимального геометрического покрытия. *Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении*, 2012. URL: [http://www.ssau.ru/files/science/conferences/pit2012/pit\\_12\\_0\\_6\\_v1\\_36.pdf](http://www.ssau.ru/files/science/conferences/pit2012/pit_12_0_6_v1_36.pdf) (дата обращения 23.08.2017).

**Кошлаков Никита Владимирович** — студент кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — Филиппов Михаил Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

## THE PROBLEM OF GEOMETRIC COVERING

N.V. Koshlakov

nikitakoshlakov@ya.ru

SPIN-код: 4047-3905

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

The article considers the problem of geometric covering with the smallest area of overlaps and holes of the objects. It is a particular case of the optimal design problem and it belongs to the “cutting and wrapping” class of problems. The complexity of the optimal design problems considered is conditioned by their belonging to the class of nondeterministic polynomial time hard problems, which does not allow solving them by precise methods and requires constructing approximate optimization methods and algorithms. It is efficient to use metaheuristic methods. The article examines “the first appropriate”, probabilistic, extremal, genetic and ant colony optimization algorithms. Their application will allow increasing the efficiency of the systems and reducing the expenditures for their designing and realization.

### Keywords

The problem of optimizing the geometric covering, nondeterministic polynomial time hard problem, metaheuristic algorithms

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

---

### References

- [1] Kantorovich L.V., Zalgaller V.A. Ratsional'nyy raskroy promyshlennykh materialov [Rational cutting of industrial materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2012. 300 p.
- [2] Yudakov P.V. The problem of three-dimensional packaging and methods for solving it. *Inzhenernyy vestnik. Jelektr. nauchno-tekh. zhurn.* [Engineering Bulletin. El. Publ. (MGTU im. N.E. Baumana)], 2015, no. 6 (in Russ.). Available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/781936.html>.
- [3] Zabelin S.L., Frolovskiy V.D. Development and the analysis of the approached methods of the decision optimization tasks skiving stock problem. *Informatsionnye tekhnologii v proektirovani i proizvodstve* [Information technology of CAD/CAM/CAE (ITDP)], 2012, no. 3 (in Russ.). Available at: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_16897548\\_69207742.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_16897548_69207742.pdf).
- [4] Chub I.A. Modeling and solving the optimization problem of placing flammable objects based on the placement region topography. *Matematichne ta kompyuterne modelyuvannya* [Radio Electronics, Computer Science, Control], 2013, no. 1, pp. 88–93 (in Russ.).
- [5] Kureychik V.V., Glushchenko A.E., Orlov A.N. Hybrid approach for three-dimensional packaging problem. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2016, no. 6 (156), pp. 45–53 (in Russ.).
- [6] Dorigo M. Optimization, learning and natural algorithms. *PhD thesis*. Politecnico di Milano, Italie, 2012.
- [7] Zabelin S.L., Frolovskiy V.D., Zhegolko K.V. Development and investigation of genetic algorithm for project procedures automation of geometrical coverage optimization. *Vestnik TGTU* [Transactions of TSTU], 2015, vol. 21, no. 2 (in Russ.). Available at: [http://vestnik.tstu.ru/rus/t\\_21/pdf/21\\_2\\_005.pdf](http://vestnik.tstu.ru/rus/t_21/pdf/21_2_005.pdf).

- [8] Sroavnenie algoritma dvumernykh matrits i murav'inogo algoritma dlya zadachi geometricheskogo pokrytiya. Available at: <http://lab18.ipu.ru/projects/conf2010/1/21.htm> (accessed 17.08.2017).
- [9] Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M., Sorokoletov P.V. Bioinspirirovannye metody v optimizatsii [*Bioinspired optimization techniques*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 380 p.
- [10] Zabelin S.L., Frolovskiy V.D. Issledovanie metaevresticheskikh algoritmov dlya zadach optimal'nogo geometricheskogo pokrytiya. *Perspektivnye informatsionnye tekhnologii v nauchnykh issledovaniyakh, proektirovanii i obuchenii*, 2012. Available at: [http://www.ssau.ru/files/science/conferences/pit2012/pit\\_12\\_0\\_6\\_v1\\_36.pdf](http://www.ssau.ru/files/science/conferences/pit2012/pit_12_0_6_v1_36.pdf) (accessed 23.08.2017).

**Koshlakov N.V.** — student, Department of Computer Software and Information Technologies, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — Filippov M.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computer Software and Information Technologies, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.