

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧЕЙ ЗОНЫ И ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Е.М. Боюнова

k\_bounova93@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

### Аннотация

Показано решение задач, связанных с определением рабочей зоны и особых положений модуля прототипа станка «Тетра» на базе плоского механизма параллельной структуры. Представлено решение обратной задачи о положениях, с использованием которого проведена дискретизация рабочего пространства с целью определения его формы и размеров. Исследование особых положений манипулятора выполнено с помощью анализа матрицы Якоби. Приведены результаты для различных значений угла поворота выходного звена.

### Ключевые слова

Особые положения, сингулярность, рабочая зона, обратная задача кинематики, механизм параллельной структуры, плоский механизм, моделирование механических систем, матрица Якоби

Поступила в редакцию 29.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Параллельный механизм «Тетра» состоит из двух модулей (рис. 1). Каждый модуль имеет выходное звено, которое соединяется с помощью штанг постоянной длины с неподвижным основанием. Штанги перемещаются по общей направляющей. Конструкция предполагает установку шпинделя и заготовки на подвижных платформах. Перпендикулярное расположение модулей друг относительно друга обеспечивает обработку заготовки по пяти координатам. Данный механизм может быть использован в пятиосевом фрезерном станке с ЧПУ для обработки малогабаритных деталей.

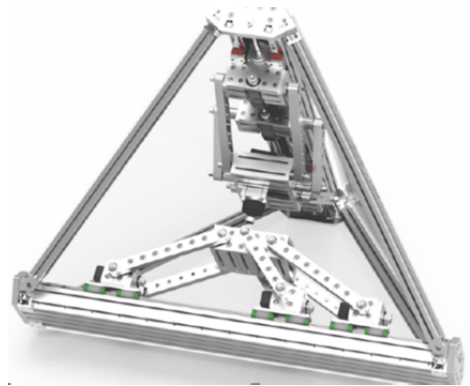


Рис. 1. Прототип станка «Тетра»

Целью работы является определение мест возникновения так называемых мертвых зон или особых положений.

Под особыми или сингулярными положениями механизма подразумевают такие варианты расположения его звеньев, в которых меняется число степеней свободы механизма, что затрудняет или делает невозможным управление им. Наличие таких положений приводит к ограничению применения механизмов параллельной структуры [1–3].

Для того чтобы определить где именно возникают данные явления, первоначально необходимо решить обратную задачу кинематики, получить аналитическим путем базовые уравнения связи, т. е. по заданному положению выходного звена — координатам точки и углам, задающим ориентацию выходного звена, найти соответствующие обобщенные координаты — перемещения суппортов  $L_i$ .

На рис. 2 представлена схема механизма, с помощью которой можно получить уравнения связи.

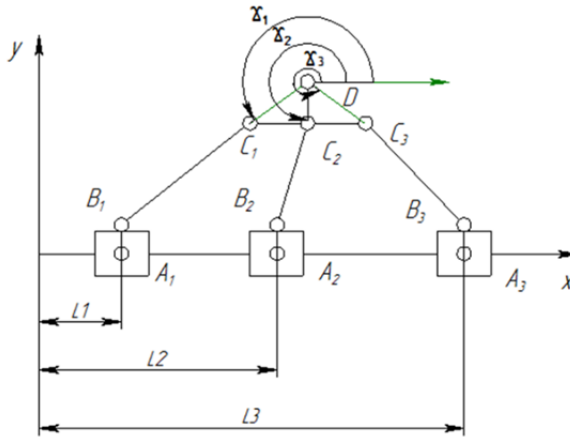


Рис. 2. Схема механизма плоского модуля «Тетра»:

$\gamma_i$  и  $\varphi_i$  — начальный угол и угол поворота выходного звена соответственно

Начальные координаты штанг:

$$X_{bi} = L_i, \quad Y_{bi} = A_i B_i.$$

Начальные координаты выходного звена:

$$X_{ci} = x + DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i),$$

$$Y_{ci} = y + DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i).$$

Таким образом, зная координаты точек и углы, задающие ориентацию выходного звена, можно легко найти перемещения суппортов:

$$B_i C_i^2 = (Y_{ci} - Y_{bi})^2 + (X_{ci} - X_{bi})^2,$$

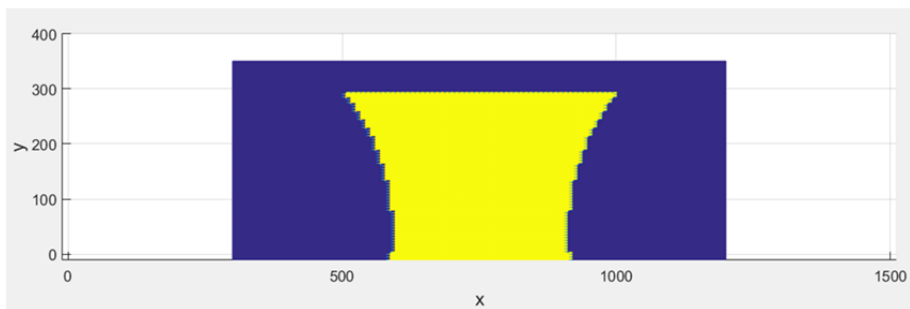
$$B_i C_i^2 = ((y + DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i) - A_i B_i)^2 + ((x + DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i) - L_i)^2), \quad (1)$$

$$L_{i1} = DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i) + x - \sqrt{BC_i^2 - (DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i) + y - AB_i)^2},$$

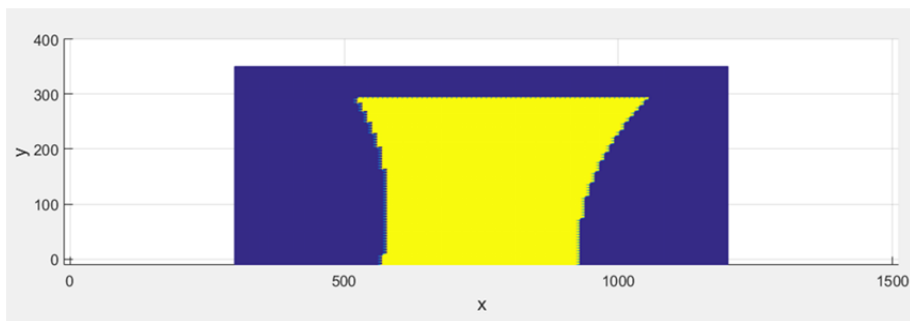
$$L_{i2} = DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i) + x + \sqrt{BC_i^2 - (DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i) + y - AB_i)^2}$$

С помощью полученных уравнений связи была написана программа, с использованием среды MATLAB, которая на заданной площади перебирает с определенным шагом точки. В каждой точке она пытается решить обратную задачу кинематики. Если получается это сделать в действительных числах, значит точки принадлежат рабочей зоне, если нет — то не принадлежат [4].

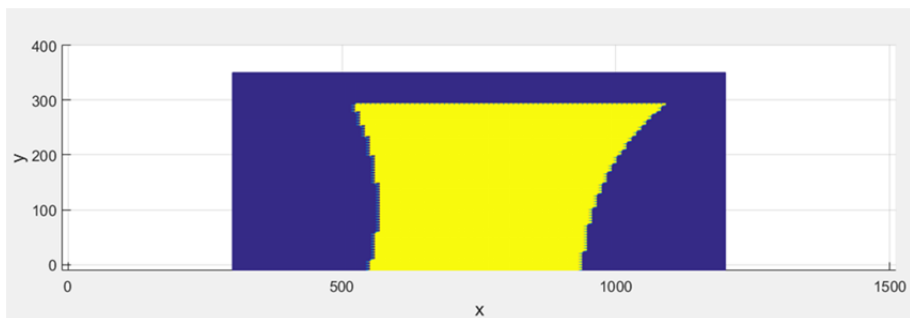
Таким образом были определены области рабочей зоны при разных углах наклона платформы (рис. 3).



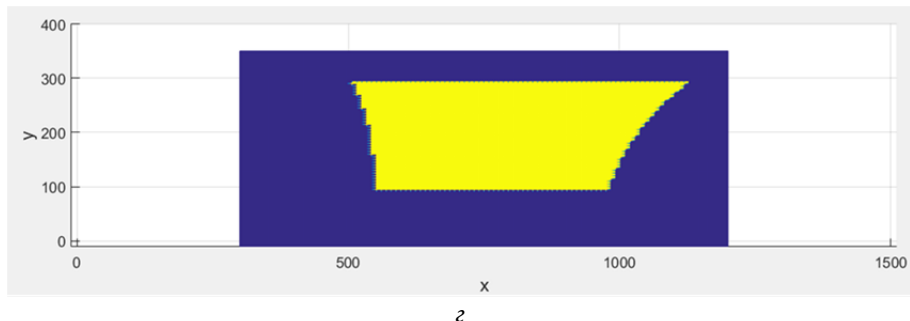
*a*



*б*



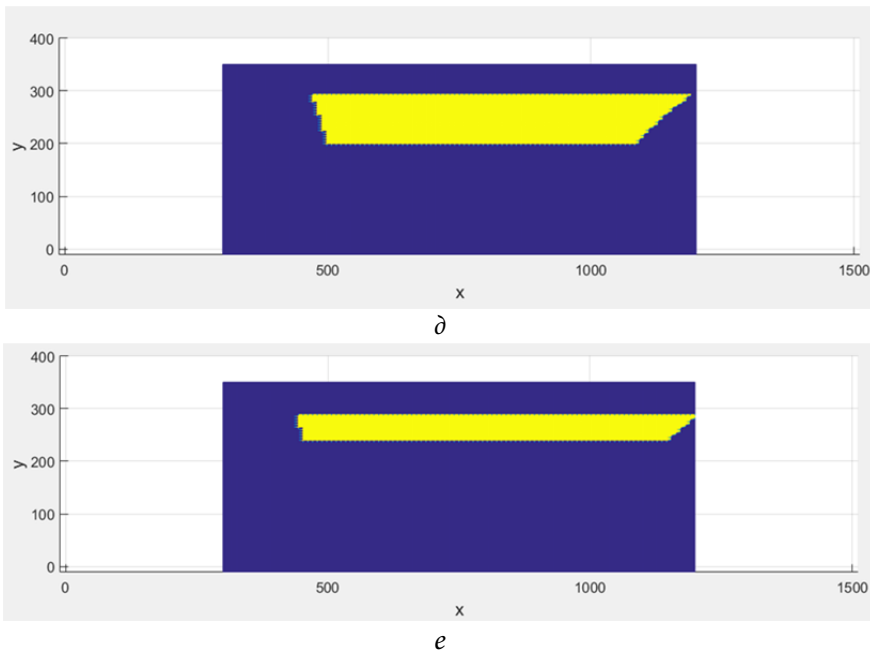
*в*



*з*

**Рис. 3.** Рабочая зона:

*a* — при горизонтальном положении платформы; *б* — при угле наклона платформы, равном  $30^\circ$ ;  
*в* — при угле наклона платформы, равном  $45^\circ$ ; *з* — при угле наклона платформы, равном  $60^\circ$



**Рис. 3.** Рабочая зона:

$\delta$  — при угле наклона платформы, равном  $90^\circ$ ;  $e$  — при угле наклона платформы, равном  $110^\circ$

Для определения особых положений будет использована эта программа, где при переборе точек будут продифференцированы уравнения связи и получен определитель матрицы Якоби механизма.

При применении метода, основанного на использовании свойств матрицы Якоби [5], необходимо получить уравнения связи и представить их как

$$F(x, l) = 0,$$

т. е. в виде неявной функции от вектора абсолютных координат  $x$  и вектора обобщенных координат  $l$ .

Зависимость между скоростями можно описать уравнением вида

$$\dot{l} = J\dot{x},$$

где  $\dot{l}$  — вектор размера  $m$  скоростей изменения обобщенных координат;  $J$  — матрица Якоби, составленная для системы уравнений связи;  $\dot{x}$  — вектор размера  $n$  скоростей изменения абсолютных координат.

Матрица Якоби будет иметь размерность  $m \times n$ , где  $m$  — число изменяемых входных координат, а  $n$ , равное количеству степеней свободы механизма, — число абсолютных координат выходного звена в декартовой системе, которые могут изменяться в процессе движения манипулятора. Для исследуемого механизма данная матрица будет иметь размер  $3 \times 3$ . Но может быть и так, что  $m > n$ . Например, в манипуляторах с избыточными связями число изменяемых входных координат бывает больше шести, однако число степеней свободы не может превышать шесть. Таким образом, в

манипуляторах с избыточными связями возможно соотношение  $m > n$ . При использовании рассматриваемого метода уравнение записывается в виде

$$\mathbf{J}_A \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_B \dot{\mathbf{l}} = 0,$$

где

$$\mathbf{J}_A = \partial F(x, l) / \partial x,$$

$$\mathbf{J}_B = \partial F(x, l) / \partial l.$$

Итак, матрица Якоби представляется в виде двух матриц:  $\mathbf{J}_A$  размером  $n \times n$  и матрицы  $\mathbf{J}_B$  размером  $n \times m$ . Преимуществом такого разделения является возможность исследования особых положений, которое сводится к определению случаев вырождения данных матриц.

Подставим уравнение (1) в виде неявной функции:

$$(y + DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i) - A_i B_i)^2 + (x + DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i) - L_i)^2 - B_i C_i^2 = 0. \quad (2)$$

Теперь необходимо получить матрицу Якоби, представленную, в данном случае, в виде двух матриц размера  $3 \times 3$ , имеющих вид

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial x & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial y & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial \varphi \\ \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial x & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial y & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial \varphi \\ \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial x & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial y & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial \varphi \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{J}_B = \begin{pmatrix} \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial L_i & 0 & 0 \\ 0 & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial L_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial L_i \end{pmatrix},$$

где  $F_i(x, y, \varphi, L_i)$  — уравнение (2), представленное в виде неявной функции переменных  $x, y, \varphi, L_i$ :

$$\partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial x; \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial y; \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial \varphi; \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial L_i.$$

Частные производные рассчитываются по формулам

$$\partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial x = 2x - 2L_i + 2DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i), \quad (4)$$

$$\partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial y = 2y - 2A_i B_i + 2DC_i, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial \varphi &= 2DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i)(y - A_i B_i + DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i)) - \\ &- 2DC_i \sin(\gamma_i + \varphi_i)(x - L_i + DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\partial F_i(x, y, \varphi, L_i) / \partial L_i = 2L_i - 2x - 2DC_i \cos(\gamma_i + \varphi_i). \quad (7)$$

Для определения особых положений необходимо исследовать вырожденность матриц  $\mathbf{J}_A$  и  $\mathbf{J}_B$ . При этом особые положения принято разделять на три типа [5]:

- 1) особые положения, в которых механизм теряет одну или несколько степеней свободы;
- 2) в которых происходит потеря управления, т. е. возможно некоторое перемещение выходного звена при зафиксированных приводах;
- 3) в которых могут проявляться свойства как 1-го, так и 2-го типов.

Условием сингулярности 1-го типа является вырожденность матрицы  $J_B$ , т. е. случай, когда ее определитель равен нулю либо не определен

$$\det(J_B) = 0.$$

Это условие выполняется, если хотя бы один из элементов главной диагонали равен нулю.

Критерием сингулярности особых положений 2-го типа является вырожденность матрицы  $J_A$

$$\det(J_A) = 0.$$

При подстановке (4)–(7) в (3) данное условие приобретает весьма сложный и громоздкий вид, поэтому не представляется возможным быстро и точно определить наличие или отсутствие зон особых положений и, в случае существования таких зон, их форму и объем. В связи с этим более рациональным вариантом является исследование особых положений 2-го типа итерационным способом.

Как уже было сказано, особые положения 3-го типа характеризуются свойствами сингулярности как 1-го, так и 2-го типа. Условием сингулярности 3-го типа является вырожденность обеих матриц  $J_A$  и  $J_B$  в том случае, когда определитель матрицы  $J_A$  не найден, а определитель матрицы  $J_B$  равен нулю

$$\det(J_A) = 0 / 0 \text{ и } \det(J_B) = 0.$$

Для более четкого представления особых положений целесообразно считать, что если в двух соседних точках знаки определителя разные, то между этими точками должна находиться такая, в которой определитель матрицы равен нулю. Таким образом, с добавлением в программу этого условия с заданной точностью было определено местонахождение точек особых положений.

На рис. 4–5 видно, что при углах наклона платформы  $30^\circ$  и  $45^\circ$  возникают особые положения.

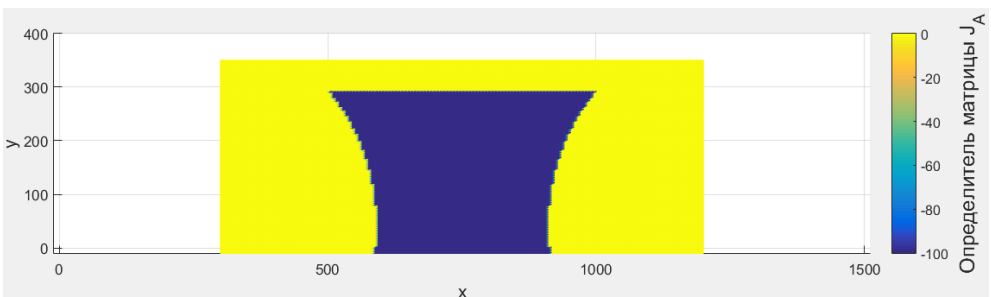
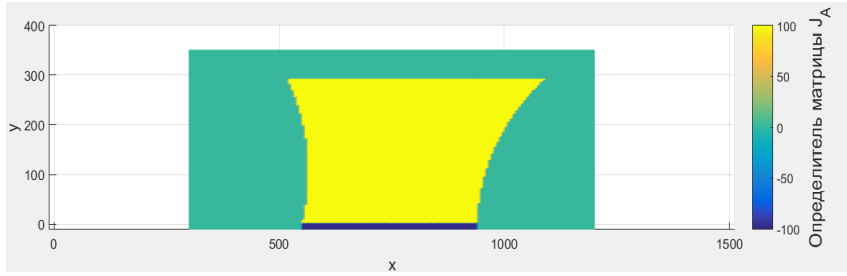
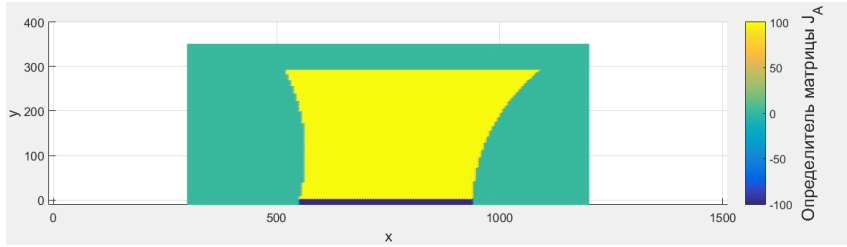


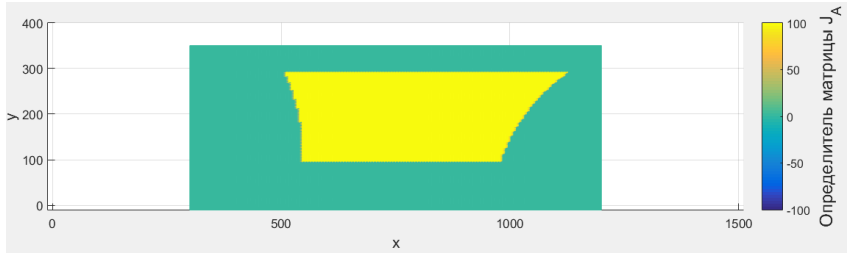
Рис. 4. Особые положения при угле наклона платформы, равном  $0^\circ$



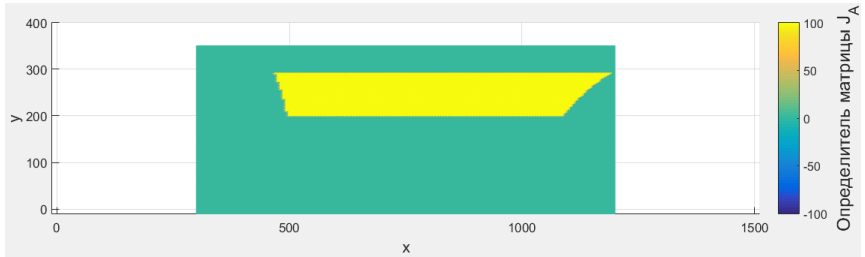
*a*



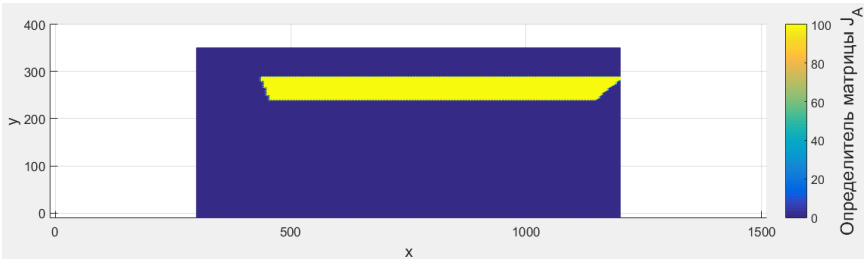
*б*



*в*



*г*



*д*

**Рис. 5.** Рабочая зона:

*a* — при угле наклона платформы, равном  $30^\circ$ ; *б* — при угле наклона платформы, равном  $45^\circ$ ;  
*в* — при угле наклона платформы, равном  $60^\circ$ ; *г* — при угле наклона платформы, равном  $90^\circ$ ;  
*д* — при угле наклона платформы, равном  $110^\circ$

Представленные в статье результаты исследования особых положений модуля прототипа станка «Тетра» позволят в дальнейшем определить теоретические распределения зависимости усилий в приводах от положения выходного звена.

## Литература

- [1] Глазунов В.А., Чунихин А.Ю. Развитие механизмов параллельной структуры. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014, № 3, с. 37–43.
- [2] Ларюшкин П.А. Классификация и условия возникновения особых положений в механизмах параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2017, № 1(682), с. 16–23.
- [3] Глазунов В.А., Колисков А.Ш., Крайнев А.Ф. *Пространственные механизмы параллельной структуры*. Москва, Наука, 1991. 96 с.
- [4] Хейло С.В., Ларюшкин П.А. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры. *Справочник. Инженерный журнал с приложением*, 2013, № 2(191), с. 27–31.
- [5] Gosselin С.М., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automatics*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290.

**Боюнова Екатерина Михайловна** — магистрант кафедры «Основы конструирования машин», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

**Научный руководитель** — С.В. Палочкин, д-р техн. наук, профессор кафедры «Основы конструирования машин», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.



## DETERMINATION OF WORKING AREA AND SPECIAL POSITIONS OF THE PLANE PARALLEL STRUCTURE MECHANISM

E.M. Boyunova

k\_bounova93@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

### Abstract

*This article is devoted to solving the problems concerning the definition of the working area and special positions of the Tetra machine's module prototype on the basis of a parallel structure plane mechanism. In this paper, we present a solution to the inverse problem of positions, by means of which we carry out the discretization of the working area to determine its shape and dimensions. We investigate the manipulator's special positions by analyzing Jacobi matrix. The study gives the results for different values of the output link rotation angle.*

### Keywords

*Special positions, singularities, working area, inverse kinematic problem, parallel structure mechanism, plane mechanism, modeling of mechanical systems, Jacobi matrix*

© Bauman Moscow State Technical University, 2017

### References

- [1] Glazunov V.A., Chunikhin A.Yu. Development of mechanisms of parallel structure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 3, pp. 37–43. (Eng. version of journal: *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 3, pp. 211–216.)
- [2] Laryushkin P.A. Classification and occurrence conditions of singularities in parallel mechanisms. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2017, no. 1(682), pp. 16–23.
- [3] Glazunov V.A., Koliskor A.Sh., Kraynev A.F. *Prostranstvennyye mekhanizmy parallel'noy struktury* [Spatial mechanism of parallel structure]. Moscow, Nauka publ., 1991. 96 p.
- [4] Kheylo S.V., Laryushkin P.A. Determination of robot range manipulators parallel structure. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal s prilozheniem* [Handbook. An Engineering Journal with Appendix], 2013, no. 2(191), pp. 27–31.
- [5] Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automatics*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290.

**Boyunova E.M.** — Master's Degree student, Department of Principles of Machine Construction, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

**Scientific advisor** — S.V. Palochkin, Professor, Department of Principles of Machine Construction, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.